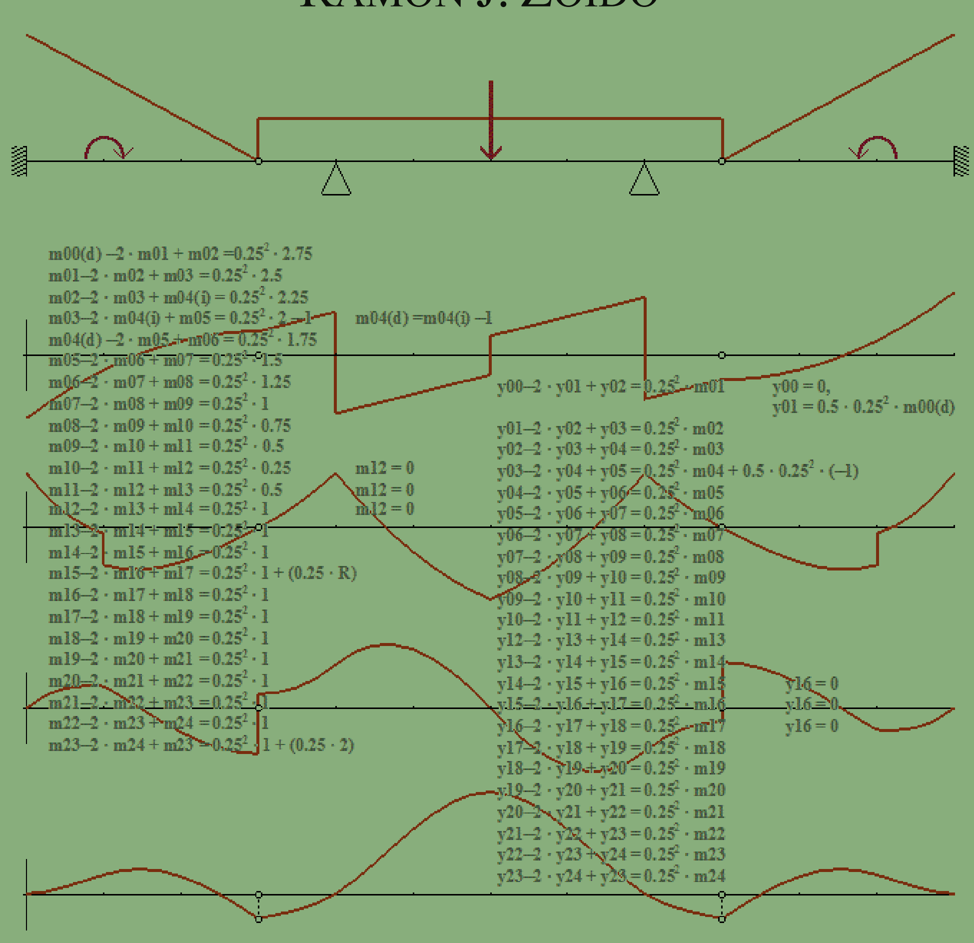
MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS APLICADOS AL ANÁLISIS DE LA FLEXIÓN SIMPLE EN VIGAS RECTAS DE RIGIDEZ CONSTANTE (III)

por

PEDRO GALÁN DEL SASTRE

RAMÓN J. ZOIDO



CUADERNOS

DEL INSTITUTO

JUAN DE HERRERA

DE LA *ESCUELA DE*

ARQUITECTURA

DE MADRID

3-53-09

MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS APLICADOS AL ANÁLISIS DE LA FLEXIÓN SIMPLE EN VIGAS RECTAS DE RIGIDEZ CONSTANTE (III)

por

PEDRO GALÁN DEL SASTRE

RAMÓN J. ZOIDO

CUADERNOS

DEL INSTITUTO

JUAN DE HERRERA

DE LA *ESCUELA DE*

ARQUITECTURA

DE MADRID

3-53-09

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

Métodos en diferencias finitas aplicados al análisis de la flexión simple en vigas rectas de rigidez constante (III).

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 421.01 / 3-53-09
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-492-9
ISBN-13: 978-84-9728-495-0
Depósito Legal: M-17383-2014

El problema del análisis de la flexión simple en piezas rectas de sección constante con ciertas hipótesis complementarias y otras condiciones de forma y solicitación nos conduce a un modelo regido por una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes con condiciones de contorno que puede ser reducido a un problema unidimensional definido en un intervalo. Este problema es, como se sabe, fundamental en el campo de la edificación por el predominio de estas piezas en arquitectura e ingeniería. La presencia de cargas y momentos puntuales en las solicitaciones de vigas es imprescindible para completar un modelo operativo ya que permite ampliar substancialmente el campo del análisis a vigas de varios tramos y otros problemas de interés en el contexto estructural. Pero esta presencia nos impide efectuar holgadamente integraciones "convencionales" con lo que se necesita acudir a otros procedimientos matemáticos entre los que se encuentran los métodos numéricos.

El método de integración por diferencias finitas es un método numérico universal y extraordinariamente eficaz que resulta una solución idónea por su simplicidad y adaptabilidad a cualquier tipo de planteamientos en este ámbito. El sistema de ecuaciones al que conduce la resolución de los problemas puede hoy día ser resuelto con gran facilidad por la mayor parte de calculadoras ordinarias y programas informáticos.

Después de una exposición del procedimiento con carácter general descrito sobre los casos más simples para ecuaciones de 2º y 4º orden, se ha procedido a configurar unas fórmulas de uso sistemático totalmente adaptadas a las condiciones del problema de la flexión simple en lo que hemos denominado "métodos en dos etapas" partiendo de la caracterización de las condiciones de conjugación de la unión rígida, el tratamiento de las secciones extremas y, en su caso, de la unión articulada. Con esta descripción pormenorizada puede ya procederse reiteradamente sobre las piezas de uno o varios tramos sean cuales sean sus vinculaciones de extremo. Se ha dado la mayor importancia a los ejercicios prácticos que son los que permiten comprender la metodología operativa y obtener los resultados buscados en los distintos casos comparando sus soluciones con las obtenidas por otros métodos.

Finalmente somos conscientes de que en un trabajo de estas características es inevitable la aparición de erratas o de falta de precisión que iremos corrigiendo en revisiones posteriores.

Pedro Galán del Sastre
Ramón J. Zoido
Mayo 2014

Índice general

3 Introducción de las cargas concentradas y los momentos de flexión aislados

3.1. Acerca de las cargas concentradas y los momentos de flexión aislados

En el contexto de la flexión de barras que estamos tratando aquí, una carga concentrada es, básicamente, la idealización de una carga vertical notable que actúa sobre un espacio muy estrecho reducido, en el límite, a un punto. La forma de esta función simbólica antes de su idealización es indiferente pero sobreviene al ir estrechando la base y aumentando la altura conservando el valor del área que subtiende. Matemáticamente, el objeto que mejor describe este tipo de función es el denominado "*impulso de Dirac*" o función δ (delta). El empleo de la función *delta* fue sistematizado por el físico inglés Paul Dirac y manifiesta un hecho físico idealizado, enormemente fecundo en el campo de la física y la mecánica. Podemos imaginar, por ejemplo una carga uniforme $\frac{Q}{e}$ actuando sobre un intervalo $\left(a - \frac{e}{2}, a + \frac{e}{2}\right)$ que vamos reduciendo progresivamente conservando el área que subtiende como se muestra en la figura 3.1.

Como se ha dicho, la forma generatriz de esta idealización no tiene importancia y puede ser consecuencia de un impulso rectangular como en la figura 3.1, de una onda senoidal, de una función de Gauss, etc. habida cuenta de que lo importante es lo que se conserva cuando $e \to 0$. No es este el lugar indicado para extendernos acerca del emplazamiento matemático de tales funciones que amplían el concepto clásico de función –funciones generalizadas o distribuciones– y que tienen un contexto matemático propio –teoría de distribuciones–. Para

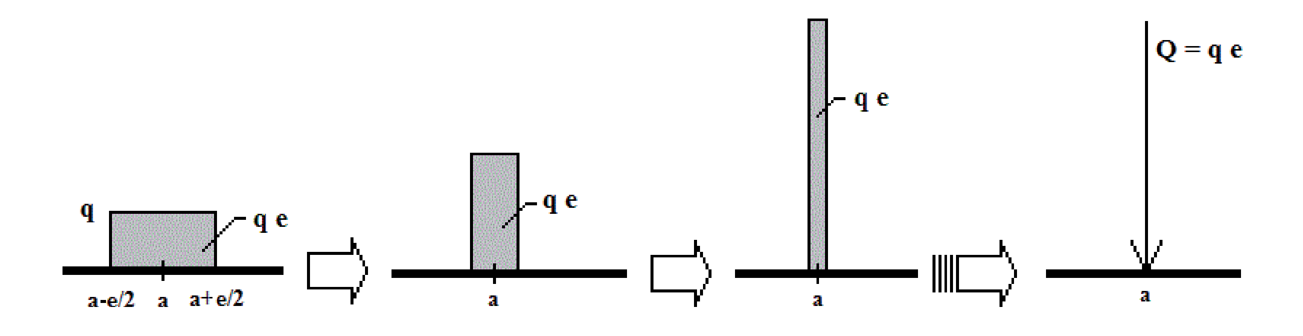


Figura 3.1

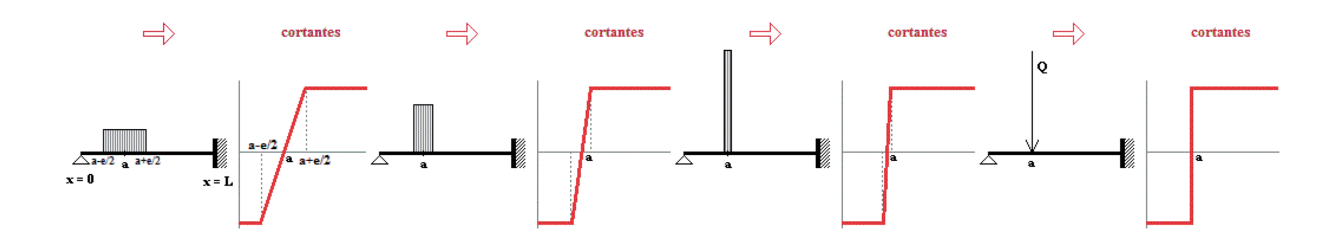


Figura 3.2

nosotros lo importante es visualizar en esta génesis la variación de las funciones de esfuerzo y particularmente en el caso de la carga concentrada la variación del esfuerzo de corte. Encontramos un esquema de esa secuencia en la figura 3.2 para una viga apoyada-empotrada en la que podemos comprobar cómo la solicitación de una carga concentrada Q en un punto introduce en ese punto una discontinuidad de salto finito en la ley de cortantes y que el valor de dicho salto es justamente el valor de la carga Q. En los métodos operacionales de integración utilizamos usualmente la notación $Q\delta(x-a)$ para representar matemáticamente la carga puntual de valor Q en $x=a$.

Ligado en cierto modo a la consideración de las cargas concentradas están los momentos aislados que solicitan la viga en un punto. Si ahora contemplamos una ley de cargas compuesta por dos impulsos rectangulares idénticos pero de signos opuestos que se estrechan simultáneamente alrededor del valor $x=a$ de la viga empotrada-apoyada de la figura 3.3, la secuencia nos llevará a la consideración de un par de fuerzas de igual magnitud y si el estrechamiento se hace alrededor del punto central $x=a$ de la figura el resultado es el de una nueva función: un par puro concentrado o momento de flexión aislado idealizado actuando en el punto $x=a$. El momento aislado M actuando en el punto $x=a$ introduce así una discontinuidad de salto finito en ese punto sobre la ley de momentos flectores y justamente el valor de dicho salto es M. En el límite, el momento resultará ser la "derivada" de un impulso de Dirac y en el contexto de los métodos operacionales habitualmente representamos $M\delta'(x-a)$ para introducir en términos matemáticos un momento aislado en el punto $x=a$. En la figura 3.4 se representa esta génesis desde un ejemplo de función con forma general arbitraria $f(x)$ y su correspondiente derivada $f'(x)$.

Aquí nos basta con asumir que las cargas concentradas y los momentos aislados en la ley de cargas introducen discontinuidades de primera especie en la ley de cortantes y momentos flectores respectivamente y cuyo salto es, en su caso, el valor de la carga o del momento. Ambas conclusiones resultan por otra parte de interpretación bastante lógica desde el punto

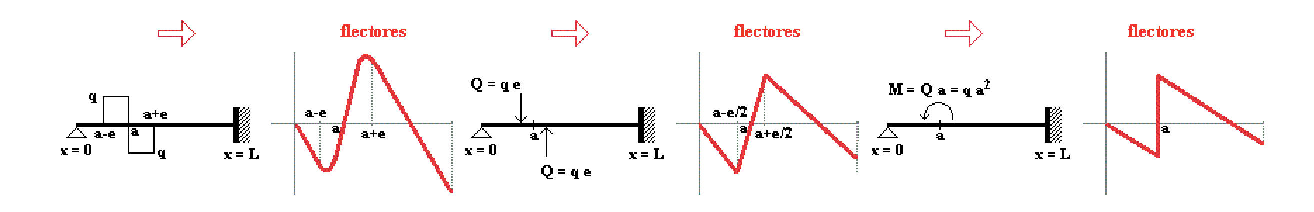


Figura 3.3

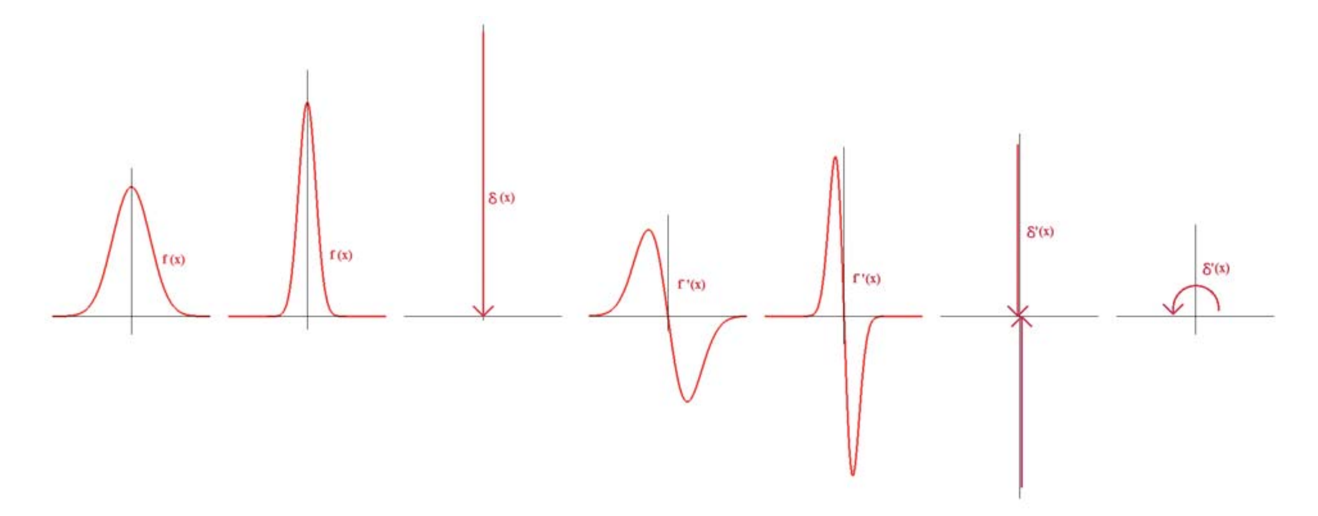


Figura 3.4

de vista mecánico-elástico por lo que no merece la pena insistir demasiado. La presencia de cargas y momentos puntuales en las solicitaciones de vigas es imprescindible para completar un modelo operativo en la práctica y permite además ampliar substancialmente el campo del análisis a vigas de varios tramos y problemas de interés en este contexto como el de las *líneas de influencia* y otros.

3.2. Las condiciones de conjugación de la unión rígida. Modelo en dos etapas en el caso de solicitaciones que incluyen cargas puntuales y momentos aislados

Consideramos ahora un modelo en el que las vigas están solicitadas por leyes de cargas que incluyen además de las componentes continuas o discontinuas, cargas y momentos aislados de flexión. Estos últimos los consideraremos en todo caso establecidos sobre los nodos de la red discreta para que su contribución a la flexión pueda ser evaluada.

En estas condiciones, podemos describir las "anomalías" posibles que, sobre cualquier nodo de la red discreta de paso h, pueden considerarse. Se presentan en la figura 3.5 e incluyen básicamente tres posibles presencias:

a. una discontinuidad de salto finito en la ley de cargas,

b. una carga concentrada de valor Q,

c. un momento aislado de magnitud M.

Ya hemos visto que el hecho de admitir discontinuidades de primera especie en los nodos de una función no introduce dificultades inevitables lo que es congruente con que la integración ordinaria cubre este tipo de funciones sin precisiones adicionales. Obsérvese que estas discontinuidades se presentan en el orden más alto de derivación que adquieren sentido físico

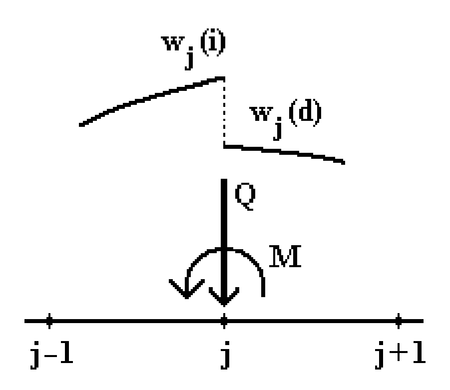


Figura 3.5

para nosotros que es el orden cuatro y que el proceso de análisis es esencialmente un proceso de integración sucesiva.

Aceptando que, por hipótesis elástica, la curva deformada sea una función de clase uno y teniendo en cuenta lo anteriormente dicho para las cargas y momentos aislados, podemos representar en cada punto interior de una viga $x = x_j$ las siguientes condiciones para cada sección en el proceso de flexión:

$$\begin{array}{l} y_j\,(d) - y_j\,(i) = 0, \\ y_j'\,(d) - y_j'\,(i) = 0, \\ By_j''\,(d) - By_j''\,(i) = M \Longrightarrow m_j\,(d) - m_j\,(i) = M, \\ By_j'''\,(d) - By_j'''\,(i) = Q \Longrightarrow t_j\,(d) - t_j\,(i) = Q, \end{array} \tag{3.1}$$

donde (d) e (i) representan el valor que toman las correspondientes funciones a la derecha y la izquierda respectivamente del nodo x_j en cuestión. Adoptando la notación general $f_j\,(d) - f_j\,(i) = [f_j]$, estas cuatro condiciones se representan simplemente por:

$$\begin{array}{l} [y_j] = 0, \\ \left[y_j'\right] = 0, \\ \left[By_j''\right] = [m_j] = M, \\ \left[By_j'''\right] = [t_j] = Q, \end{array} \tag{3.2}$$

que son las *condiciones de conjugación* de la sección rígida en el modelo de flexión simple que consideramos.

Estas condiciones junto a las aproximaciones $O\left(h^2\right)$ de las derivadas que venimos utilizando nos van a permitir reconstruir un modelo de aproximación "en dos etapas" con la inclusión de cargas y momentos puntuales en la ley de solicitación que introduciremos de forma sencilla a través justamente de estas condiciones.

Puesto que ahora podemos encontrar discontinuidades en las funciones de esfuerzos a causa de la existencia de acciones puntuales necesitaremos abordar cada uno de los nodos o bien por su derecha o por su izquierda en lo que se refiere a la ley de flectores y de cortantes. El paso entre ambas posiciones es inmediato teniendo en cuenta las condiciones de conjugación

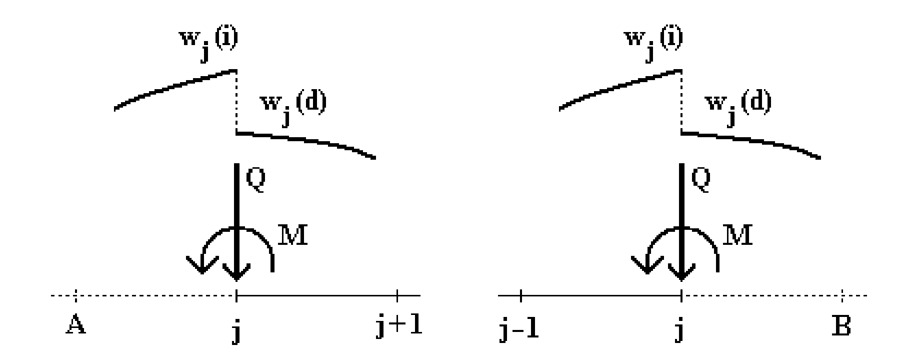


Figura 3.6

(3.1) o bien (3.2). Esto supone básicamente que a efectos de las leyes de esfuerzos hay que operar entre cada dos nodos de la red sobre subintervalos abiertos.

Para construir el esquema de aproximación que vamos a utilizar con una precisión más que aceptable en la gran mayoría de los casos, abordaremos la configuración estándar del nodo x_j de la figura 3.5 a la izquierda y a la derecha de los subintervalos que separa el punto x_j representando en cada caso los puntos ficticios x_A y x_B respectivamente tal y como se muestra en la figura 3.6.

La ecuación $m''(x) = w(x)$ aproximada en el nodo x_j a su derecha se podrá escribir:

$$m''_j(d) = \frac{m_{j+1}(i) - 2m_j(d) + m_A(d)}{h^2} = w_j(d),$$

y de aquí

$$m_A(d) = h^2 w_j(d) + 2m_j(d) - m_{j+1}(i).$$

Del mismo modo abordando el nodo x_j por la izquierda:

$$m''_j(i) = \frac{m_B(i) - 2m_j(i) + m_{j-1}(d)}{h^2} = w_j(i),$$

de donde

$$m_B(i) = h^2 w_j(i) + 2m_j(i) - m_{j-1}(d).$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la aproximación $O(h^2)$ de la derivada primera y los valores de $m_A(d)$ y $m_B(d)$ obtenidos anteriormente podremos escribir:

$$\begin{aligned} m'_j(d) &= \frac{m_{j+1}(i) - m_A(d)}{2h} = \frac{2m_{j+1}(i) - h^2 w_j(d) - 2m_j(d)}{2h}, \\ m'_j(i) &= \frac{m_B(i) - m_{j-1}(d)}{2h} = \frac{-2m_{j-1}(d) + h^2 w_j(i) + 2m_j(i)}{2h}. \end{aligned}$$

Aplicando ahora la cuarta condición de conjugación:

$$m'_j(d) - m'_j(i) = Q = \frac{2m_{j+1}(i) - 2m_j(d) - 2m_j(i) + 2m_{j-1}(d) - h^2 w_j(d) - h^2 w_j(i)}{2h},$$

y teniendo en cuenta la tercera condición de (3.1), la anterior expresión puede escribirse:

$$2hQ = 2m_{j+1}(i) - 4m_j(i) + 2m_{j-1}(d) - 2M - h^2(w_j(d) + w_j(i)),$$

y de aquí, ordenando los términos:

$$m_{j+1}(i) - 2m_j(i) + m_{j-1}(d) = h^2 \frac{w_j(d) + w_j(i)}{2} + hQ + M.$$

Finalmente, introduciendo la notación general $\bar{f}_j = \dfrac{f_j(d) + f_j(i)}{2}$, obtenemos el esquema en diferencias a aplicar en la primera etapa:

$$\frac{m_{j+1}(i) - 2m_j(i) + m_{j-1}(d)}{h^2} = \bar{w}_j + \frac{1}{h}Q + \frac{1}{h^2}M. \quad (3.3)$$

Para obtener ahora el esquema en la segunda etapa tendremos en cuenta que la ecuación $By''(x) = m(x)$ aproximada en el nodo x_j a su derecha y a su izquierda –figura 3.6– se escribe:

$$\begin{aligned} By_j''(d) &= B\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_A}{h^2} = m_j(d), \\ By_j''(i) &= B\frac{y_B - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} = m_j(i), \end{aligned}$$

donde está implícita la primera condición de conjugación $y_j(d) = y_j(i)$. De ambas ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} By_A &= h^2 m_j(d) + 2By_j - By_{j+1}, \\ By_B &= h^2 m_j(i) + 2By_j - By_{j-1}. \end{aligned}$$

Por otra parte, abordando por la derecha y por la izquierda la primera derivada en el punto x_j:

$$\begin{aligned} By_j'(d) &= B\frac{y_{j+1} - y_A}{2h} = \frac{2By_{j+1} - h^2 m_j(d) - 2By_j}{2h}, \\ By_j'(i) &= B\frac{y_B - y_{j-1}}{2h} = \frac{2By_j + h^2 m_j(i) - 2By_{j-1}}{2h}, \end{aligned}$$

así que, finalmente, imponiendo la condición $y_j'(d) = y_j'(i)$ y teniendo en cuenta $m_j(d) = m_j(i) + M$, se escribirá:

$$\frac{2By_{j+1} - h^2(m_j(i) + M) - 2By_j}{2h} = \frac{2By_j + h^2 m_j(i) - 2By_{j-1}}{2h}$$

ecuación que ordenada puede expresarse en la forma:

$$B\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} = m_j(i) + \frac{1}{2}M \quad (3.4)$$

que constituye el esquema en diferencias para la segunda etapa.

Cuando $Q = 0$ y $M = 0$ en los nodos involucrados, las ecuaciones (3.3) y (3.4) son las ya utilizadas a lo largo del apartado § 2. Este modelo desprecia términos del orden de h^3 y superiores, esto es: términos multiplicados por este factor o por potencias superiores de h.

3.3. Una precisión acerca de los signos implícitos en el análisis. Momentos aislados positivos y negativos

Se habrá advertido que hemos venido considerando el origen en el extremo izquierdo de la viga y el eje OX como la directriz recta de la misma en el sistema de ejes habitual levógiro (eje OX positivo hacia la derecha y el eje OY positivo hacia arriba). Por otro lado, las cargas las hemos venido considerando como positivas en el sentido de solicitación más corriente, esto es: actuando de arriba hacia abajo (sentido gravitatorio). Con estos convenios los descensos de cada sección de la pieza serán positivos y los giros de las secciones dextrógiros resultan positivos en tanto los levógiros son negativos. Esto significa que los resultados de las funciones de deformación no coinciden con los geométricos resultantes de la deformación física. Por esa razón se utilizan diferentes convenios para que se verifique la coincidencia, bien sea establecer en el origen el eje OY positivo hacia abajo (sentido dextrógiro de ejes) o bien introducir un signo menos en determinadas ecuaciones etc. Estos criterios se encuentran en diferentes textos relativos al tema, según sus preferencias. En cuanto al sentido de las funciones de esfuerzo, estos son completamente independientes de las de deformación. Adoptado el sentido gravitatorio positivo para las cargas, ya sean concentradas o distribuidas, deberemos ahora elegir un signo para los momentos aislados. Tomaremos el sentido levógiro como positivo para estos momentos lo que resulta congruente con el asignado a las cargas. De esta manera,

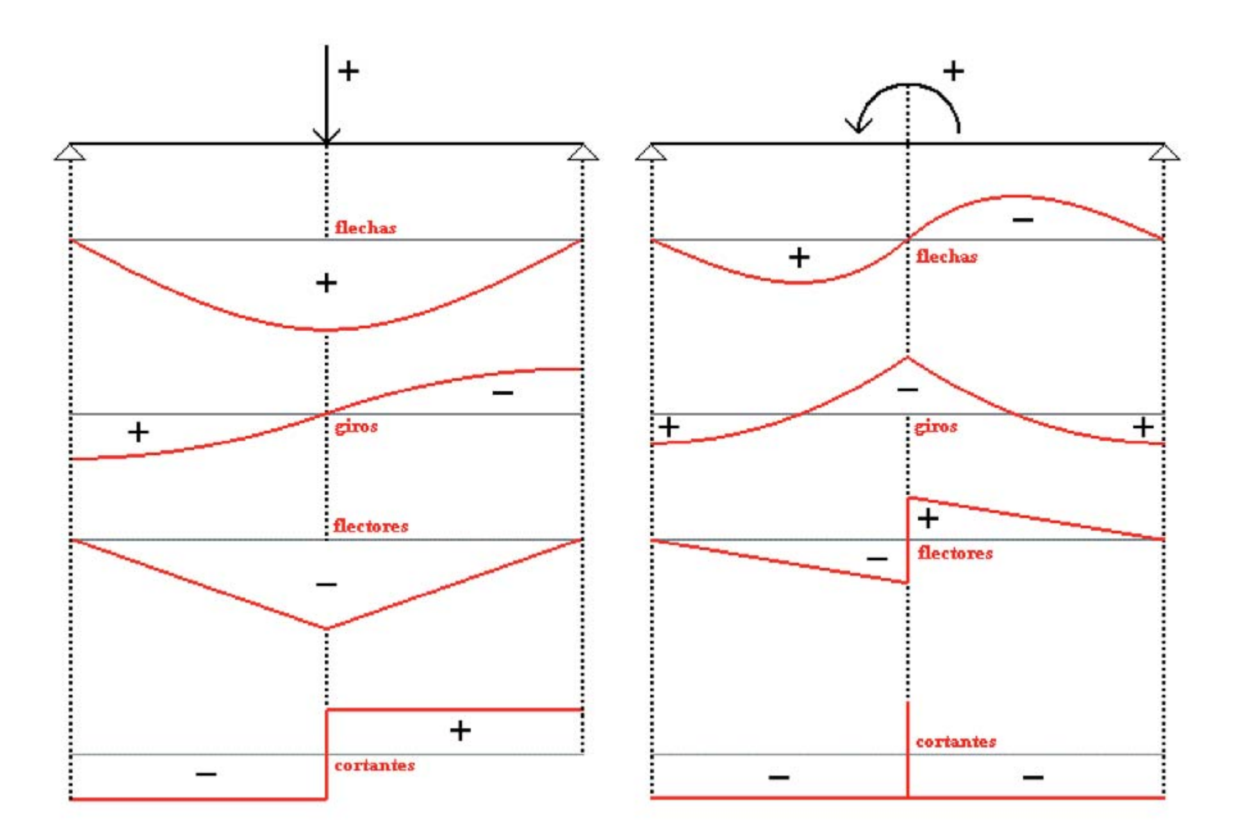


Figura 3.7

a momentos flectores negativos en un punto x les corresponderá en el entorno de x una incurvación de las fibras superiores a la fibra neutra contraídas en tanto las inferiores están extendidas. Los resultados numéricos obtenidos para las funciones de esfuerzo coinciden con este criterio y muestran los resultados con su signo correspondiente aunque es muy habitual representar gráficamente los momentos negativos en sentido contrario.

Es significativo representar las gráficas de deformación y esfuerzo de cargas y momentos aislados indistintamente en una viga cualquiera –por ejemplo la doblemente apoyada de la figura 3.7– y representar los signos que resultan de aplicar los criterios establecidos independientemente de cómo se desee disponer las representaciones gráficas para ampliar su expresividad o para acomodarla a la representación elegida.

3.4. Presencia en los extremos de cargas y momentos aislados. Nuevas condiciones de contorno

Disponiendo de las ecuaciones (3.3) y (3.4) para aplicar las dos etapas de la integración aproximada por diferencias, nos queda por ajustar las condiciones de extremo en los casos en los que puedan estar solicitados por cargas o momentos aislados. Esto incluye tanto los bordes libres en los que pueden coexistir cargas y momentos como los apoyos perfectos que pueden ser solicitados por momentos. Esto dará lugar a las condiciones para los seis modelos más generales representados en la tabla 3.1 que cuando $Q = M = 0$ se convierten en las condiciones de la tabla 2.9.

En la tabla 3.1 se observa que solicitaciones puntuales consideradas positivas según lo visto anteriormente –sentido levógiro para los momentos aislados y gravitatorias para las cargas concentradas– cuando actúan en el extremo derecho de la barra, tanto el momento flector como su derivada –el cortante– a la izquierda de este extremo deberá ser negativo siguiendo las reglas simples:

$$\begin{aligned} M &= m(d) - m(i) = 0 - m(i) \Longrightarrow m(i) = -M, \\ Q &= m'(d) - m'(i) = 0 - m'(i) \Longrightarrow m'(i) = -Q. \end{aligned}$$

En tanto en el extremo izquierdo solicitado por un momento aislado M, este momento pasa a ser, trivialmente, el momento a computar para el momento flector m a la derecha del extremo. Lo mismo le ocurre a la carga puntual Q en el caso de un extremo izquierdo libre que pasa a ser el valor de $m'(d) = t(d)$:

$$\begin{aligned} M &= m(d) - m(i) = m(d) - 0 \Longrightarrow m(d) = M, \\ Q &= m'(d) - m'(i) = m'(d) - 0 \Longrightarrow m'(d) = Q. \end{aligned}$$

Para los momentos y cortantes del extremo izquierdo y del extremo derecho de las vigas es conveniente conservar respectivamente la notación derecha (d) e izquierda (i). En los nodos interiores de las barras rígidas sin articulaciones no es necesaria la distinción entre derecha e izquierda para los desplazamientos y los giros ya que las funciones que los singularizan son, por hipótesis, continuas. Finalmente, en los nodos interiores sobre los que no hay momentos aislados M ni cargas concentradas Q se puede prescindir de la notación izquierda y derecha para momentos flectores y cortantes para evitar la complicación innecesaria de los cálculos.

tipo de viga	**extremo izquierdo**		**extremo derecho**	
ménsula empotrada en su extremo izquierdo	$y(0)=0$	$y'(0)=0$	$m(l)=-M$	$m'(l)=-Q$
ménsula empotrada en su extremo derecho	$m(0)=M$	$m'(0)=Q$	$y(l)=0$	$y'(l)=0$
viga doblemente apoyada	$y(0)=0$	$m(0)=M$	$y(l)=0$	$m(l)=-M$
viga empotrada-apoyada	$y(0)=0$	$y'(0)=0$	$y(l)=0$	$m(l)=-M$
viga apoyada-empotrada	$y(0)=0$	$m(0)=M$	$y(l)=0$	$y'(l)=0$
viga doblemente empotrada	$y(0)=0$	$y'(0)=0$	$y(l)=0$	$y'(l)=0$

Tabla 3.1

Para obtener las condiciones de primera etapa en el extremo izquierdo de un borde libre podemos proceder, sobre el esquema de la figura 3.8(a), utilizando los métodos anteriores ya descritos. Se pueden escribir las ecuaciones:

$$\begin{aligned} m_0(d) &= M, \\ m_0'(d) &= Q = \frac{m_1(i) - m_{-1}}{2h}, \\ m_0''(d) &= w_0(d) = \frac{m_1(i) - 2m_0(d) + m_{-1}}{h^2}. \end{aligned}$$

De la tercera ecuación obtenemos:

$$m_{-1} = h^2 w_0(d) + 2m_0(d) - m_1(i),$$

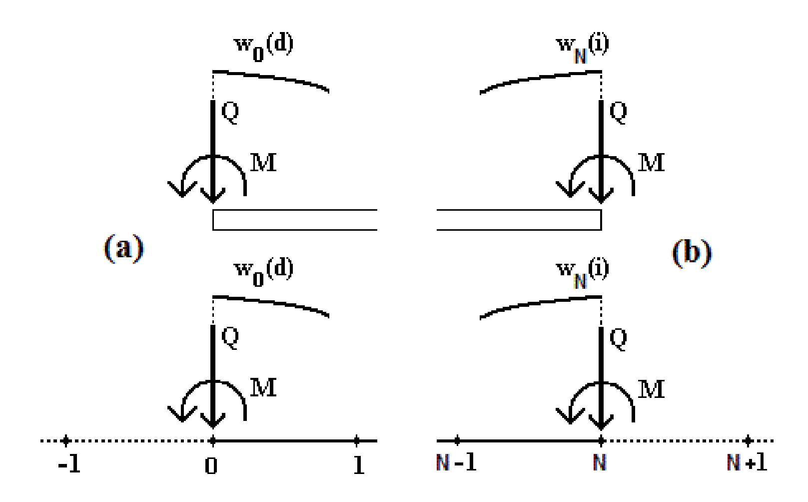


Figura 3.8

valor que llevado a la segunda ecuación nos permite escribir:

$$2m_1(i) = 2hQ + 2m_0(d) + h^2 w_0(d)$$

y substituyendo $m_0(d)$ por su valor, se obtiene finalmente

$$m_1(i) = \frac{1}{2}h^2 w_0(d) + hQ + M.$$

De forma análoga podemos proceder en el extremo derecho sobre la figura 3.8(b). Tendremos:

$$\begin{aligned} m_N(i) &= -M, \\ m'_N(i) &= -Q = \frac{m_{N+1} - m_{N-1}(d)}{2h}, \\ m''_N(i) &= w_N(i) = \frac{m_{N+1} - 2m_N(i) + m_{N-1}(d)}{h^2}. \end{aligned}$$

De la tercera ecuación obtenemos

$$m_{N+1} = h^2 w_N(i) + 2m_N(i) - m_{N-1}(d),$$

lo que nos permite escribir la segunda ecuación en la forma:

$$2m_{N-1}(d) = 2hQ + 2m_N(i) + h^2 w_N(i),$$

y de aquí, finalmente:

$$m_{N-1}(d) = \frac{1}{2}h^2 w_N(i) + hQ - M.$$

En el empotramiento perfecto, tomando como referencia el extremo izquierdo representado en la figura 3.9, de las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} B\frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} &= m_0(d), \\ \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} &= 0, \end{aligned}$$

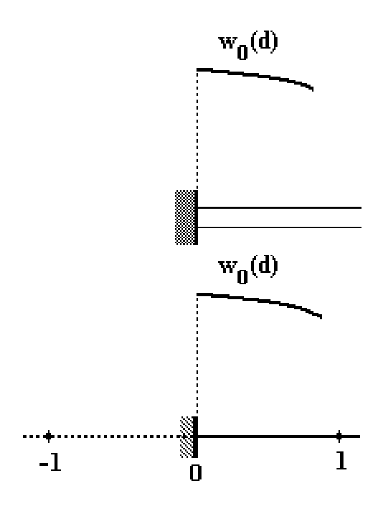


Figura 3.9

teniendo en cuenta que $y_0 = 0$, se deduce que

$$By_1 = \frac{1}{2}h^2 m_0\left(d\right).$$

Esta última condición, junto a $y_0 = 0$, serán las dos condiciones de extremo en este caso. El resultado se puede aplicar al extremo derecho sin más que considerar los correspondientes subíndices.

Con estas precisiones podemos completar ya la tabla operativa 3.2 que incluye, además de la componente segmentariamente continua de la ley de cargas, las solicitaciones puntuales en los extremos. Cuando los valores Q y M se anulan, las condiciones de la tabla 3.2 se convierten en las ya utilizadas en la tabla 2.10 del § 2.

3.5. Reconstrucción de los esfuerzos de corte y de los giros de las secciones. Valores en los extremos

Obtenidos los momentos flectores m_j, o en su caso $m_j\left(i\right)$ y $m_j\left(d\right)$, y los descensos y_j de las secciones en los nodos de la red $R_h^1\left[0,l\right]$ como soluciones del sistema de ecuaciones construido por aplicación reiterada de las (3.3) y (3.4) más las correspondientes condiciones de extremo, quedan por calcular los giros de las secciones y los cortantes para completar el análisis de la flexión.

Los esfuerzos de corte en cada nodo, t_j, –o en su caso $t_j\left(i\right)$ y $t_j\left(d\right)$– los obtenemos por derivación de los momentos obtenidos en el sistema de ecuaciones pero para incluir la contribución de las posibles cargas concentradas y los momentos aislados así como los saltos finitos de las componentes segmentariamente continuas de las leyes de cargas necesitaremos efectuar algunas correcciones. Teniendo en cuenta las aproximaciones por diferencias progresivas y regresivas vistas en el § 1, ecuaciones (1.3) y (1.5) despreciando los términos $O\left(h^2\right)$, y el esquema de la figura 3.5 podemos escribir a la derecha y la izquierda del nodo interior

vínculos	**condiciones de extremo**	
	1ª etapa	**2ª etapa**
0 1 2 empotramiento perfecto		$\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ By_1 &= \frac{1}{2}h^2 m_0(d) \end{aligned}$
N-2 N-1 N empotramiento perfecto		$\begin{aligned} y_N &= 0 \\ By_{N-1} &= \frac{1}{2}h^2 m_N(i) \end{aligned}$
M 0 apoyo rígido	$m_0(d) = M$	$y_0 = 0$
M N apoyo rígido	$m_N(i) = -M$	$y_N = 0$
Q M 0 1 2 extremo libre	$\begin{aligned} m_0(d) &= M \\ m_1(i) &= \frac{1}{2}h^2 w_0(d) + hQ + M \end{aligned}$	
Q M N-2 N-1 N extremo libre	$\begin{aligned} m_N(i) &= -M \\ m_{N-1}(d) &= \frac{1}{2}h^2 w_N(i) + hQ - M \end{aligned}$	

Tabla 3.2: Solicitaciones segmentariamente continuas sin acciones aisladas en los extremos.

x_j las aproximaciones:

$$\begin{aligned} t_j(i) &= m_j'(i) = \frac{m_j(i) - m_{j-1}(d)}{h} + \frac{1}{2}hm_j''(i) = \frac{m_j(i) - m_{j-1}(d)}{h} + \frac{1}{2}hw_j(i), \\ t_j(d) &= m_j'(d) = \frac{m_{j+1}(i) - m_j(d)}{h} - \frac{1}{2}hm_j''(d) = \frac{m_{j+1}(i) - m_j(d)}{h} - \frac{1}{2}hw_j(d), \end{aligned}$$

sumando ambas expresiones y teniendo en cuenta que $t_j(d) = t_j(i) + Q$, ecuaciones (3.1), se obtiene:

$$\frac{m_{j+1}(i) - m_j(d) + m_j(i) - m_{j-1}(d)}{h} - \frac{1}{2}h(w_j(d) - w_j(i)) = 2t_j(i) + Q,$$

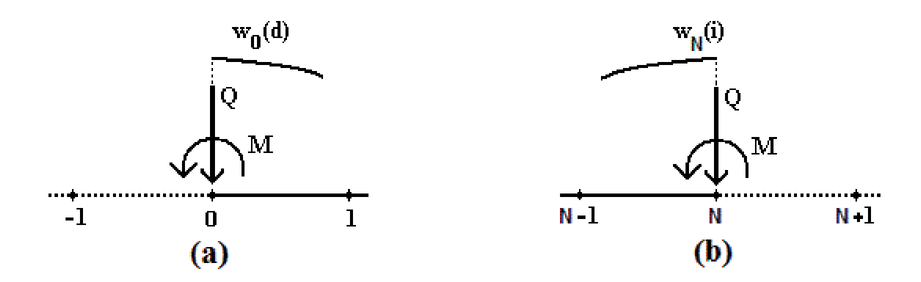


Figura 3.10

y puesto que $m_j(d) = m_j(i) + M$, ecuaciones (3.1), la expresión anterior queda:

$$t_j(i) = \frac{m_{j+1}(i) - m_j(i) - M + m_j(i) - m_{j-1}(d)}{2h} - \frac{1}{2}Q - \frac{1}{4}h\left(w_j(d) - w_j(i)\right),$$

que, con la notación $[w_j] = w_j(d) - w_j(i)$, puede escribirse finalmente en la forma:

$$t_j(i) = \frac{m_{j+1}(i) - m_{j-1}(d)}{2h} - \frac{Q}{2} - \frac{M}{2h} - \frac{1}{4}h[w_j],$$

ecuación que debe de ser aplicada en presencia de cargas y momentos aislados Q y M y que tiene en cuenta, así mismo, la contribución de las posibles discontinuidades de la ley de cargas sobre el esfuerzo de corte.

Podemos utilizar, si se quiere, los mismos procedimientos para ajustar los giros de las secciones θ_j de manera que evalúen la contribución sobre el giro de los momentos aislados M en el propio nodo x_j. Teniendo en cuenta que la deformada es una función de clase uno, de las expresiones:

$$\begin{aligned} By'_j &= B\frac{y_j - y_{j-1}}{h} + \frac{1}{2}hBy''_j(i) = B\frac{y_j - y_{j-1}}{h} + \frac{1}{2}hm_j(i), \\ By'_j &= B\frac{y_{j+1} - y_j}{h} - \frac{1}{2}hBy''_j(d) = B\frac{y_{j+1} - y_j}{h} - \frac{1}{2}hm_j(d), \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $m_j(d) - m_j(i) = [m_j] = M$, ecuaciones (3.1), sumando las dos expresiones anteriores se deduce que

$$By'_j = B\theta_j = B\frac{y_{j+1}(i) - y_{j-1}(d)}{2h} - \frac{1}{4}hM,$$

expresión que reconstruye los giros a partir de los descensos.

Finalmente quedan por considerar las posibles correcciones de los valores de cortantes y giros en los extremos. En el extremo izquierdo, sobre la figura 3.10(a), podemos escribir las dos expresiones:

$$\begin{aligned} m'_0(d) &= \frac{m_1(i) - m_{-1}}{2h}, \\ m''_0(d) &= w_0(d) = \frac{m_1(i) - 2m_0(d) + m_{-1}}{h^2}, \end{aligned}$$

despejando el valor de m_{-1} de la segunda ecuación y substituido en la primera se obtiene:

$$m_0'(d) = t_0(d) = \frac{2m_1(i) - 2m_0(d) - h^2 w_0(d)}{2h} = \frac{m_1(i) - m_0(d)}{h} - \frac{1}{2}hw_0(d).$$

De la misma manera, de las dos expresiones:

$$\begin{aligned} By_0'(d) &= B\frac{y_1 - y_{-1}}{2h}, \\ m_0(d) = By_0''(d) &= B\frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2}, \end{aligned}$$

podemos despejar y_{-1} en la segunda ecuación y llevado a la primera obtenemos:

$$By_0'(d) = B\theta_0(d) = \frac{2By_1 - 2By_0 - h^2 m_0(d)}{2h} = B\frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{1}{2}hm_0(d).$$

En el extremo derecho, sobre la figura 3.10(b), partiendo de las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} m_N'(i) &= \frac{m_{N+1} - m_{N-1}(d)}{2h}, \\ m_N''(i) &= w_N(i) = \frac{m_{N+1} - 2m_N(i) + m_{N-1}(d)}{h^2}. \end{aligned}$$

Despejando m_{N+1} en la segunda ecuación y substituido en la primera se llega a la expresión:

$$m_N'(i) = t_N(i) = \frac{2m_N(i) - 2m_{N-1}(d) + h^2 w_N(i)}{2h} = \frac{m_N(i) - m_{N-1}(d)}{h} + \frac{1}{2}hw_N(i).$$

Abordando ahora el extremo por la derecha, de las dos expresiones:

$$\begin{aligned} By_N'(i) &= B\frac{y_{N+1} - y_{N-1}}{2h}, \\ m_N(i) = By_N''(i) &= B\frac{y_{N+1} - 2y_N + y_{N-1}}{h^2}, \end{aligned}$$

se puede deducir fácilmente:

$$By_N'(i) = B\theta_N(i) = \frac{2By_N - 2By_{N-1} + h^2 m_N(i)}{2h} = B\frac{y_N - y_{N-1}}{h} + \frac{1}{2}hm_N(i).$$

Por todo ello, las fórmulas a emplear para obtener los cortantes y los giros disponiendo de las soluciones de flectores y flechas del sistema serán las que se resumen en la tabla 3.3. Se deberá tener en cuenta el resto de características de los vínculos, particularmente $y_0 = 0$ ó $y_N = 0$ en apoyos rígidos y empotramientos perfectos y $\theta_0 = 0$ ó $\theta_N = 0$ en estos últimos, así como el signo de los momentos y cargas puntuales que solicitan el nodo.

cálculo de cortantes y giros		
cálculo de cortantes	extremo izquierdo	$t_0\,(d) = \dfrac{m_1\,(i) - m_0\,(d)}{h} - \dfrac{1}{2} h w_0\,(d)$
	nodos interiores	$t_j\,(i) = \dfrac{m_{j+1}\,(i) - m_{j-1}\,(d)}{2h} - \dfrac{Q}{2} - \dfrac{M}{2h} + \dfrac{1}{4} h\,[w_j]$
	extremo derecho	$t_N\,(i) = \dfrac{m_N\,(i) - m_{N-1}\,(d)}{h} + \dfrac{1}{2} h w_N\,(i)$
cálculo de giros	extremo izquierdo	$B\theta_0\,(d) = B\dfrac{y_1 - y_0}{h} - \dfrac{1}{2} h m_0\,(d)$
	nodos interiores	$B\theta_j = B\dfrac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} - \dfrac{1}{4} h M$
	extremo derecho	$B\theta_N\,(i) = B\dfrac{y_N - y_{N-1}}{h} + \dfrac{1}{2} h m_N\,(i)$

Tabla 3.3

3.6. Métodos en dos etapas. Ejemplos de aplicación

El método permite obtener directamente los momentos flectores y las flechas o descensos. Las fórmulas sistemáticas de aplicación serán las (3.3) y (3.4), a las que hay que añadir las condiciones de contorno de la tabla 3.2. Con los valores aproximados de flectores y descensos podemos posteriormente, si se desea, completar los valores de los esfuerzos de corte y los giros de las secciones teniendo en cuenta las fórmulas de la tabla 3.3. Todos estos datos se resumen en la tabla 3.4 que incluye toda la formulación operativa.

El método se ilustrará con seis ejemplos de distintas piezas solicitadas con leyes de cargas que incluyen cargas y momentos puntuales. Se trabajará sobre una red de paso estándar $h = 0.25$ y los resultados obtenidos se compararán con los "exactos" calculados por otros métodos.

NODOS INTERIORES (secciones rígidas)	
$w_j(i)$ $w_j(d)$ Q M j-1 j j+1	
primera etapa – flectores	**segunda etapa – descensos**
$\dfrac{m_{j+1}(i) - 2m_j(i) + m_{j-1}(d)}{h^2} = \bar{w}_j + \dfrac{1}{h}Q + \dfrac{1}{h^2}M$ $m_j(d) = m_j(i) + M$	$B\dfrac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} = m_j(i) + \dfrac{1}{2}M$

NODOS EN LOS EXTREMOS (condiciones de borde)		
vínculos	**1ª etapa**	**2ª etapa**
0 1 2 empotramiento perfecto		$y_0 = 0$ $y_1 = \dfrac{1}{2}h^2 m_0(d)$
n-2 n-1 n empotramiento perfecto		$y_N = 0$ $y_{N-1} = \dfrac{1}{2}h^2 m_N(i)$
apoyo rigido (M, 0)	$m_0(d) = M$	$y_0 = 0$
apoyo rigido (M, n)	$m_N(i) = -M$	$y_N = 0$
extremo libre (Q, M, 0 1 2)	$m_0(d) = M$ $m_1(i) = \dfrac{1}{2}h^2 w_0(d) + hQ + M$	
extremo libre (Q, M, n-2 n-1 n)	$m_N(i) = -M$ $m_{N-1}(d) = \dfrac{1}{2}h^2 w_N(i) + hQ - M$	

CÁLCULO DE CORTANTES Y GIROS		
cálculo de cortantes	extremo izquierdo	$t_0(d) = \dfrac{m_1(i) - m_0(d)}{h} - \dfrac{1}{2}hw_0(d)$
	nodos interiores	$t_j(i) = \dfrac{m_{j+1}(i) - m_{j-1}(d)}{2h} - \dfrac{Q}{2} - \dfrac{M}{2h} + \dfrac{1}{4}h[w_j]$ $t_j(d) = t_j(i) + Q$
	extremo derecho	$t_N(i) = \dfrac{m_N(i) - m_{N-1}(d)}{h} + \dfrac{1}{2}hw_N(i)$
cálculo de giros	extremo izquierdo	$\theta_0(d) = \dfrac{y_1 - y_0}{h} - \dfrac{1}{2}hm_0(d)$
	nodos interiores	$\theta_j = \dfrac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} - \dfrac{1}{4}hM$
	extremo derecho	$\theta_N(i) = \dfrac{y_N - y_{N-1}}{h} + \dfrac{1}{2}hm_N(i)$

Tabla 3.4

3.6.1. Ménsula empotrada en su extremo izquierdo

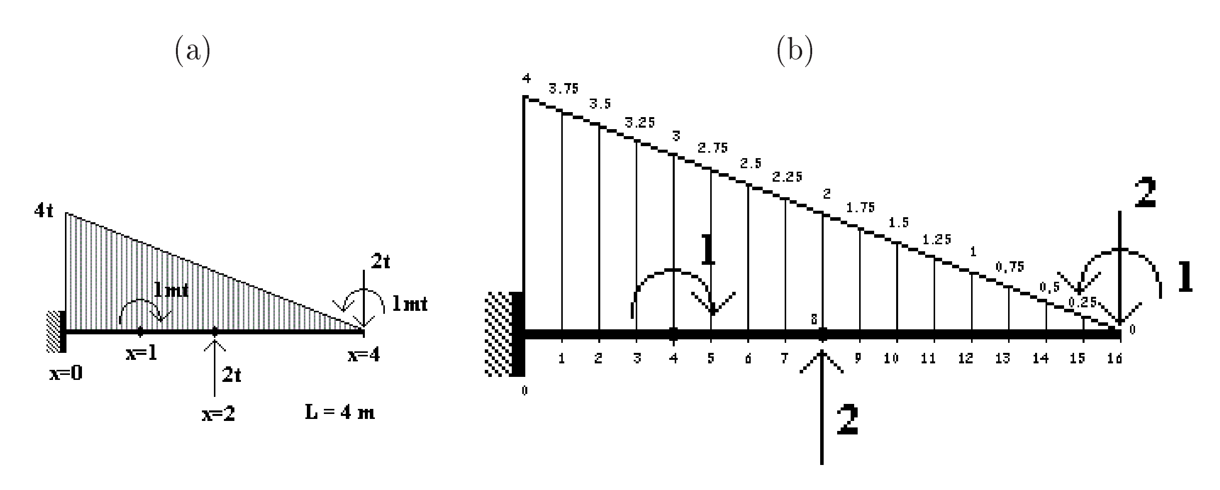


Figura 3.11

Se considera la viga empotrada–libre de $l = 4$ m con la ley de cargas tal y como se presenta en la figura 3.11(a). La componente lineal sigue la ley $w(x) = -x + 4$, el resto son cargas concentradas y momentos aislados en los puntos señalados.

Proyectaremos el intervalo sobre una red de paso constante $h = 0.25$ sobre la que proyectaremos la componente continua de las cargas como se muestra en la figura 3.11(b).

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno establecidas y las de conjugación en los puntos en los que estén aplicados momentos puntuales, podemos plantear directamente el sistema de ecuaciones en "dos etapas":

1ª etapa

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_2 - 2m_1 + m_0(d)\right) &= 3.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_3 - 2m_2 + m_1\right) &= 3.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_4(i) - 2m_3 + m_2\right) &= 3.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_5 - 2m_4(i) + m_3\right) &= 3 - \tfrac{1}{0.25^2},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_6 - 2m_5 + m_4(d)\right) &= 2.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_7 - 2m_6 + m_5\right) &= 2.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_8 - 2m_7 + m_6\right) &= 2.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_9 - 2m_8 + m_7\right) &= 2 - \tfrac{2}{0.25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{10} - 2m_9 + m_8\right) &= 1.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{11} - 2m_{10} + m_9\right) &= 1.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{12} - 2m_{11} + m_{10}\right) &= 1.25,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{13} - 2m_{12} + m_{11}\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{14} - 2m_{13} + m_{12}\right) &= 0.75,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{15} - 2m_{14} + m_{13}\right) &= 0.5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{16}(i) - 2m_{15} + m_{14}\right) &= 0.25,
\end{aligned}
$$

con las condiciones:

$m_4(d) = m_4(i) - 1,$

$m_{15} = 0.25 \cdot 2 - 1 = -0.5$

$m_{16}(i) = -1,$

2ª etapa

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_2 - 2y_1 + y_0\right) &= m_1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_3 - 2y_2 + y_1\right) &= m_2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_4 - 2y_3 + y_2\right) &= m_3,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_5 - 2y_4 + y_3\right) &= m_4(i) - \tfrac{1}{2},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_6 - 2y_5 + y_4\right) &= m_5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_7 - 2y_6 + y_5\right) &= m_6,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_8 - 2y_7 + y_6\right) &= m_7,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_9 - 2y_8 + y_7\right) &= m_8,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{10} - 2y_9 + y_8\right) &= m_9,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{11} - 2y_{10} + y_9\right) &= m_{10},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{12} - 2y_{11} + y_{10}\right) &= m_{11},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{13} - 2y_{12} + y_{11}\right) &= m_{12},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{14} - 2y_{13} + y_{12}\right) &= m_{13},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{15} - 2y_{14} + y_{13}\right) &= m_{14},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{16} - 2y_{15} + y_{14}\right) &= m_{15},
\end{aligned}
$$

con las condiciones:

$y_0 = 0,$

$y_1 = \tfrac{1}{2} \cdot 0.25^2 \cdot m_0(d).$

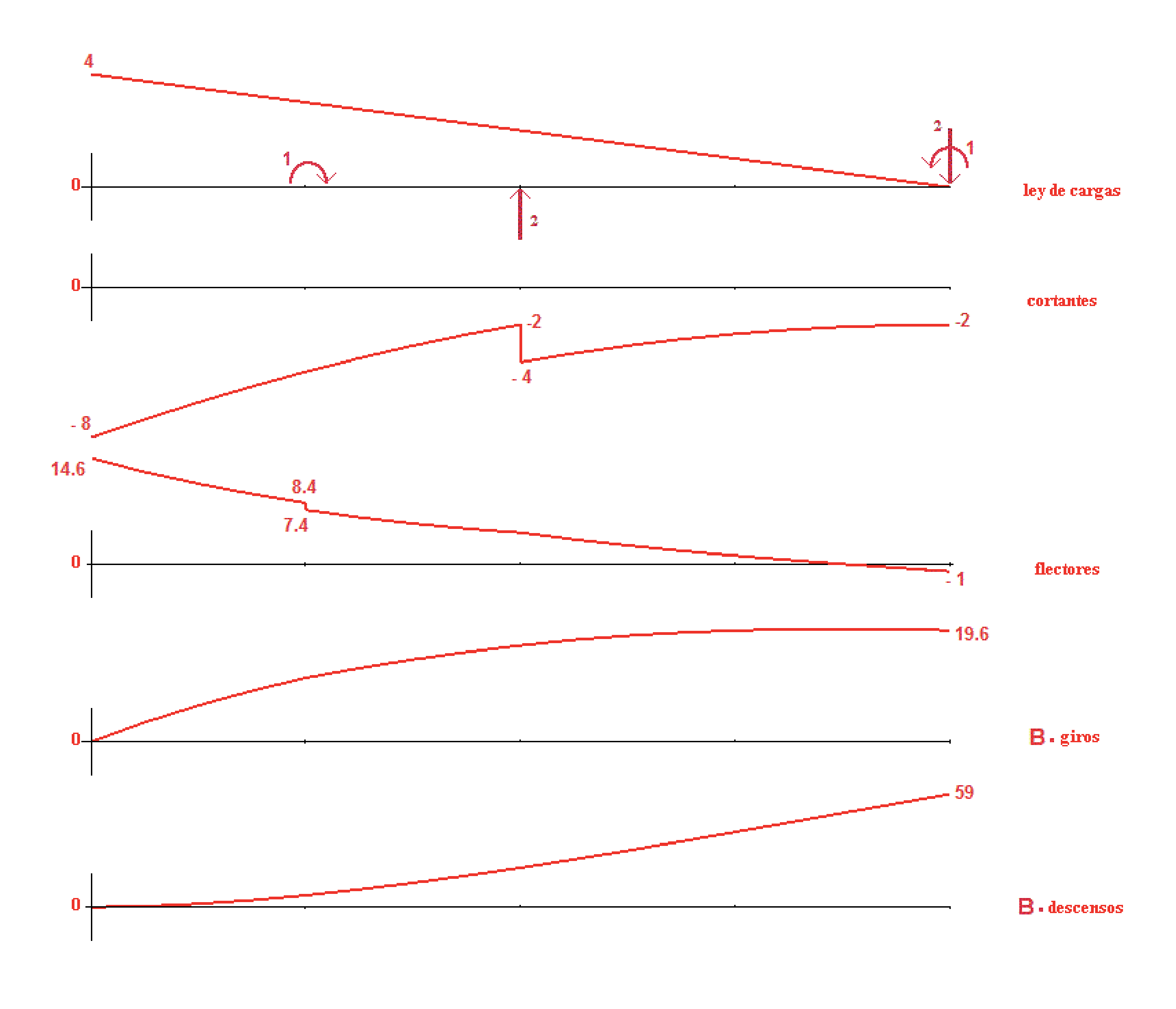


Figura 3.12

Ambas etapas son resolubles sucesivamente ya que las primeras quince ecuaciones forman un subsistema cerrado independiente. En cualquier caso las soluciones del sistema completo se presentan en la tabla 3.5 junto a los valores “exactos” de las deformadas y flectores para su adecuada comparación. Las cuatro funciones se representan gráficamente junto a la ley de cargas en la figura 3.12.

Se recuerda que para que los valores y_i representen los descensos de cada sección deberán ser divididos por el coeficiente de rigidez B de la viga.

Nos queda por reconstruir con estos datos los esfuerzos de corte y los giros de las secciones. Ambas operaciones se realizan con las fórmulas de la derivación aproximada corregida según la tabla 3.4. Ambos conjuntos de valores se representan también en la tabla 3.5 para su comparación con los valores exactos.

x	descensos By		giros $B\theta = By'$		momentos $m = By''$		cortantes $t = By'''$	
	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	14.6250	14.6667	-8.0000	-8.0000
0.25	0.4570	0.43814	3.4219	3.4269	12.7500	12.7897	-7.0312	-7.0312
0.50	1.7109	1.6768	6.4043	6.4141	11.1094	11.1458	-6.1250	-6.1250
0.75	3.6592	3.6132	9.0039	9.0181	9.6875	9.7213	-5.2812	-5.2812
1.00^-	6.2129	6.1583	11.2734	11.2917	8.4688	8.5000	-4.5000	-4.5000
1.00^+					7.4688	7.5000		
1.25	9.2646	9.2044	13.0117	13.0337	6.4375	6.4661	-3.7812	-3.7812
1.50	12.7188	12.6555	14.5137	14.5391	5.5781	5.6042	-3.1250	-3.1250
1.75	16.5215	16.4576	15.8203	15.8488	4.8750	4.8984	-2.5312	-2.5312
2.00^-	20.6289	20.5667	16.9688	17.0000	4.3125	4.3333	-2.0000	-2.0000
2.00^+							-4.0000	-4.0000
2.25	25.0059	24.9420	17.9297	17.9634	3.3750	3.3932	-3.5312	-3.5312
2.50	29.5938	29.5299	18.6699	18.7057	2.5469	2.5625	-3.1250	-3.1250
2.75	34.3408	34.2785	19.2148	19.2524	1.8125	1.8255	-2.7812	-2.7812
3.00	39.2012	39.1417	19.5859	19.6250	1.1562	1.1667	-2.5000	-2.5000
3.25	44.1338	44.0780	19.8008	19.8410	0.5625	0.5703	-2.2812	-2.2812
3.50	49.1016	49.0503	19.8730	19.9141	0.0156	0.0208	-2.1250	-2.1250
3.75	54.0703	54.0240	19.8125	19.8540	-0.5000	-0.4974	-2.0312	-2.0312
4.00	59.0078	58.9667	19.6250	19.6667	-1.0000	-1.00000	-2.0000	-2.0000

Tabla 3.5

3.6.2. Ménsula empotrada en su extremo derecho

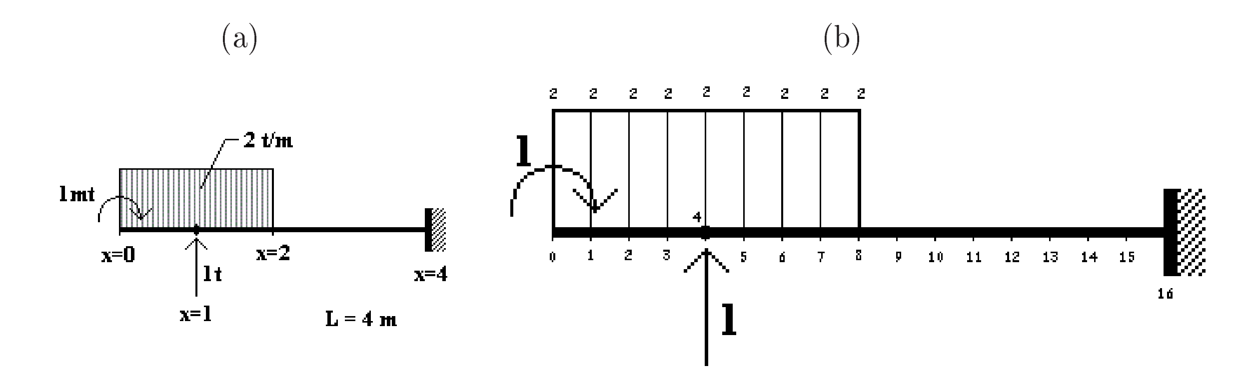


Figura 3.13

Viga libre–empotrada de 4 m con un tramo de carga uniforme de 2 t/ml y acciones aisladas como se señala en la figura 3.13(a).

Establecemos una red de paso $h = 0.25$ y numeramos los nodos según se muestra en la figura 3.13(b).

Se obtendrá el sistema de ecuaciones:

1ª etapa

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_2 - 2m_1 + m_0\,(d)\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_3 - 2m_2 + m_1\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_4 - 2m_3 + m_2\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_5 - 2m_4 + m_3\right) &= 2 - \tfrac{1}{0.25},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_6 - 2m_5 + m_4\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_7 - 2m_6 + m_5\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_8 - 2m_7 + m_6\right) &= 2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_9 - 2m_8 + m_7\right) &= 1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{10} - 2m_9 + m_8\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{11} - 2m_{10} + m_9\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{12} - 2m_{11} + m_{10}\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{13} - 2m_{12} + m_{11}\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{14} - 2m_{13} + m_{12}\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{15} - 2m_{14} + m_{13}\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{16}\,(i) - 2m_{15} + m_{14}\right) &= 0,
\end{aligned}$$

con las condiciones:

$m_0\,(d) = -1,$

$m_1 = \frac{1}{2} \cdot 0.25^2 \cdot 2 - 1,$

2ª etapa

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_2 - 2y_1 + y_0\right) &= m_1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_3 - 2y_2 + y_1\right) &= m_2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_4 - 2y_3 + y_2\right) &= m_3,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_5 - 2y_4 + y_3\right) &= m_4,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_6 - 2y_5 + y_4\right) &= m_5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_7 - 2y_6 + y_5\right) &= m_6,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_8 - 2y_7 + y_6\right) &= m_7,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_9 - 2y_8 + y_7\right) &= m_8,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{10} - 2y_9 + y_8\right) &= m_9,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{11} - 2y_{10} + y_9\right) &= m_{10},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{12} - 2y_{11} + y_{10}\right) &= m_{11},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{13} - 2y_{12} + y_{11}\right) &= m_{12},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{14} - 2y_{13} + y_{12}\right) &= m_{13},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{15} - 2y_{14} + y_{13}\right) &= m_{14},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{16} - 2y_{15} + y_{14}\right) &= m_{15},
\end{aligned}$$

con las condiciones:

$y_{15} = \frac{1}{2} \cdot 0.25^2 \cdot m_{16}\,(i)\,,$

$y_{16} = 0,$

sistema que puede resolverse sucesivamente en dos etapas en la primera de las cuales se obtienen los flectores en cada punto de la red. Las soluciones del sistema completo se presentan en la tabla 3.6 (donde las y_i deben dividirse por B para obtener los descensos de las

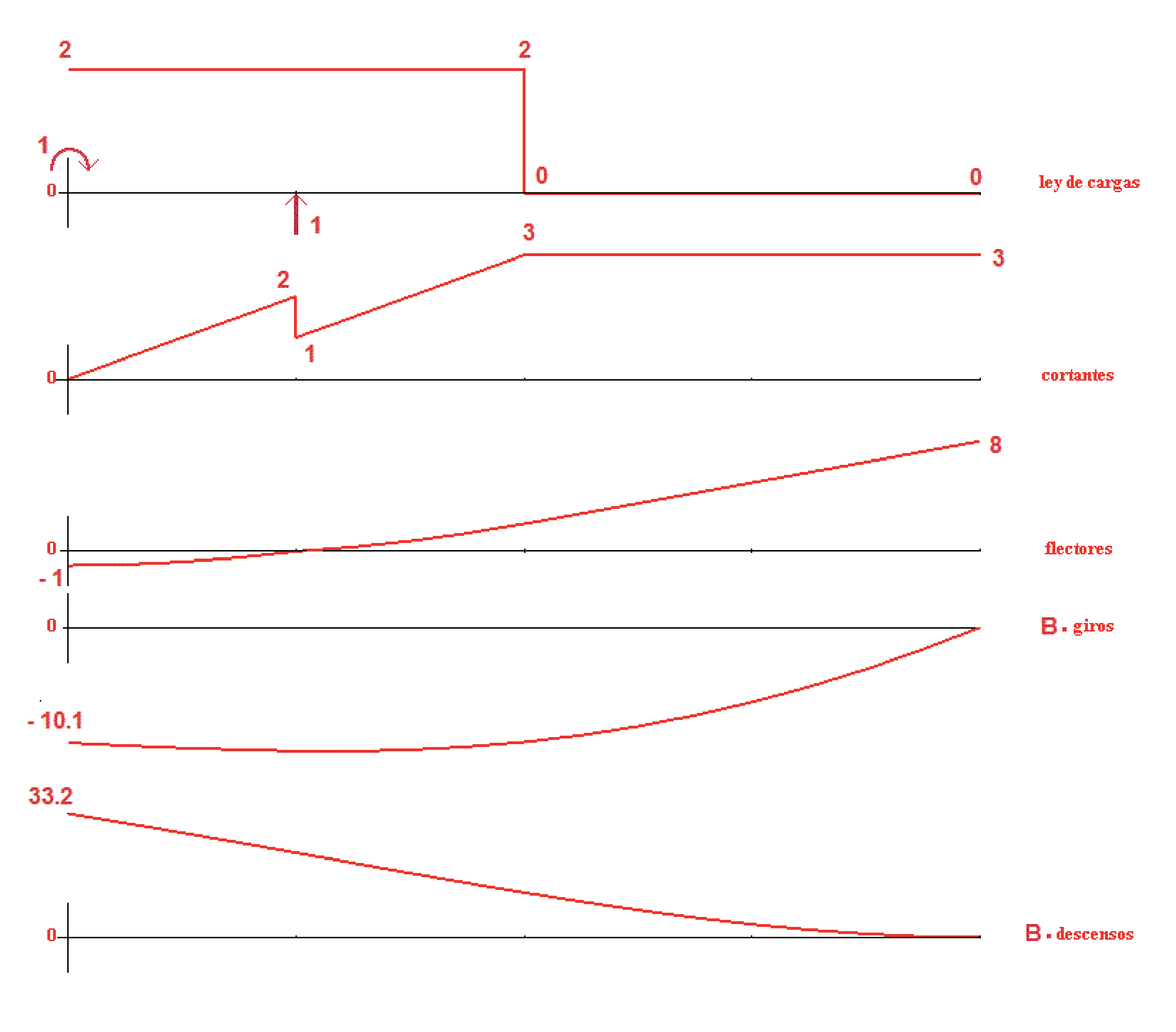


Figura 3.14

secciones en su verdadera escala) junto a los valores “exactos” de las flechas y flectores para su comparación.

Los cortantes y los giros de las secciones obtenidos mediante las fórmulas de la tabla 3.4 se muestran también en la tabla 3.6 comparándolos con los exactos.

Además, las cuatro funciones se representan gráficamente junto a la ley de cargas en la figura 3.14.

x	descensos By		giros $B\theta = By'$		momentos $m = By''$		cortantes $t = By'''$	
	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos
0.00	33.2812	33.1667	-10.1875	-10.1667	-1.0000	-1.0000	0.0000	0.0000
0.25	30.7031	30.5941	-10.4297	-10.4114	-0.9375	-0.9375	0.5000	0.5000
0.50	28.0664	27.9635	-10.6406	-10.6250	-0.7500	-0.7500	1.0000	1.0000
0.75	25.3828	25.2867	-10.7891	-10.7760	-0.4375	-0.4375	1.5000	1.5000
1.00^{-}	22.6719	22.5833	-10.8438	-10.8333	0.0000	0.0000	2.0000	2.0000
1.00^{+}							1.0000	1.0000
1.25	19.9609	19.8779	-10.8047	-10.7969	0.3125	0.3125	1.5000	1.5000
1.50	17.2695	17.1927	-10.6719	-10.6667	0.7500	0.7500	2.0000	2.0000
1.75	14.6250	14.5550	-10.4141	-10.4114	1.3125	1.3125	2.5000	2.5000
2.00	12.0625	12.0000	-10.0000	-10.0000	2.0000	2.0000	3.0000	3.0000
2.25	9.6250	9.5703	-9.4062	-9.4062	2.7500	2.7500	3.0000	3.0000
2.50	7.3594	7.3125	-8.6250	-8.6250	3.5000	3.5000	3.0000	3.0000
2.75	5.3125	5.2734	-7.6562	-7.6562	4.2500	4.2500	3.0000	3.0000
3.00	3.5312	3.5000	-6.5000	-6.5000	5.0000	5.0000	3.0000	3.0000
3.25	2.0625	2.0397	-5.1562	-5.1562	5.7500	5.7500	3.0000	3.0000
3.50	0.9531	0.9375	-3.6250	-3.6250	6.5000	6.5000	3.0000	3.0000
3.75	0.2500	0.2422	-1.9062	-1.9062	7.2500	7.2500	3.0000	3.0000
4.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	8.0000	8.0000	3.0000	3.0000

Tabla 3.6

3.6.3. Viga doblemente apoyada

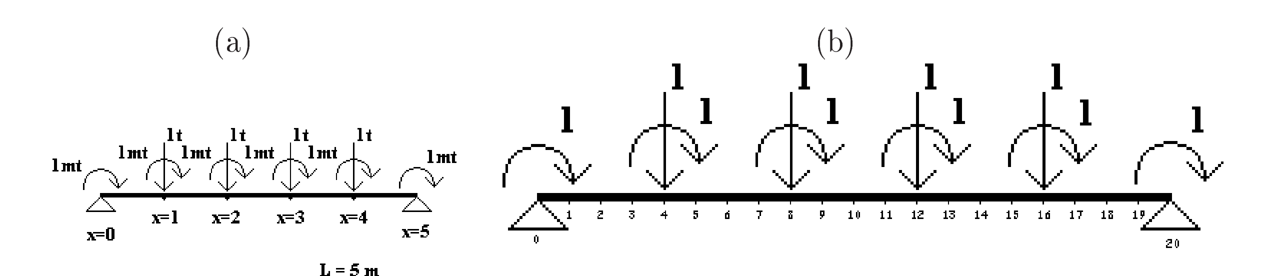


Figura 3.15

Se considera la viga doblemente apoyada de $l = 5$ m solicitada por cargas concentradas y momentos de flexión aislados como se indica en la figura 3.15(a).

Proyectaremos el intervalo sobre una red de paso constante $h = 0.25$ con las referencias de la figura 3.15(b).

El sistema de ecuaciones junto a las condiciones de extremo y de conjugación será ahora:

1ª etapa

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_2 - 2m_1 + m_0\left(d\right)\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_3 - 2m_2 + m_1\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_4\left(i\right) - 2m_3 + m_2\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_5 - 2m_4\left(i\right) + m_3\right) &= 0 + \tfrac{1}{0.25} - \tfrac{1}{0.25^2},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_6 - 2m_5 + m_4\left(d\right)\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_7 - 2m_6 + m_5\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_8\left(i\right) - 2m_7 + m_6\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_9 - 2m_8\left(i\right) + m_7\right) &= 0 + \tfrac{1}{0.25} - \tfrac{1}{0.25^2},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{10} - 2m_9 + m_8\left(d\right)\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{11} - 2m_{10} + m_9\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{12}\left(i\right) - 2m_{11} + m_{10}\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{13} - 2m_{12}\left(i\right) + m_{11}\right) &= 0 + \tfrac{1}{0.25} - \tfrac{1}{0.25^2},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{14} - 2m_{13} + m_{12}\left(d\right)\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{15} - 2m_{14} + m_{13}\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{16}\left(i\right) - 2m_{15} + m_{14}\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{17} - 2m_{16}\left(i\right) + m_{15}\right) &= 0 + \tfrac{1}{0.25} - \tfrac{1}{0.25^2},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{18} - 2m_{17} + m_{16}\left(d\right)\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{19} - 2m_{18} + m_{17}\right) &= 0,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{20}\left(i\right) - 2m_{19} + m_{18}\right) &= 0,
\end{aligned}$$

con las condiciones:

$m_0\left(d\right) = -1,$

$m_4\left(d\right) = m_4\left(i\right) - 1,$

$m_8\left(d\right) = m_8\left(i\right) - 1,$

$m_{12}\left(d\right) = m_{12}\left(i\right) - 1,$

$m_{16}\left(d\right) = m_{16}\left(i\right) - 1,$

$m_{20} = 1,$

2ª etapa

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_2 - 2y_1 + y_0\right) &= m_1,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_3 - 2y_2 + y_1\right) &= m_2,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_4 - 2y_3 + y_2\right) &= m_3,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_5 - 2y_4 + y_3\right) &= m_4 - \tfrac{1}{2},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_6 - 2y_5 + y_4\right) &= m_5,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_7 - 2y_6 + y_5\right) &= m_6,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_8 - 2y_7 + y_6\right) &= m_7,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_9 - 2y_8 + y_7\right) &= m_8 - \tfrac{1}{2},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{10} - 2y_9 + y_8\right) &= m_9,\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{11} - 2y_{10} + y_9\right) &= m_{10},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{12} - 2y_{11} + y_{10}\right) &= m_{11},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{13} - 2y_{12} + y_{11}\right) &= m_{12} - \tfrac{1}{2},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{14} - 2y_{13} + y_{12}\right) &= m_{13},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{15} - 2y_{14} + y_{13}\right) &= m_{14},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{16} - 2y_{15} + y_{14}\right) &= m_{15},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{17} - 2y_{16} + y_{15}\right) &= m_{16} - \tfrac{1}{2},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{18} - 2y_{17} + y_{16}\right) &= m_{17},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{19} - 2y_{18} + y_{17}\right) &= m_{18},\\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{20} - 2y_{19} + y_{18}\right) &= m_{19},
\end{aligned}$$

con las condiciones:

$y_0 = 0,$

$y_{20} = 0.$

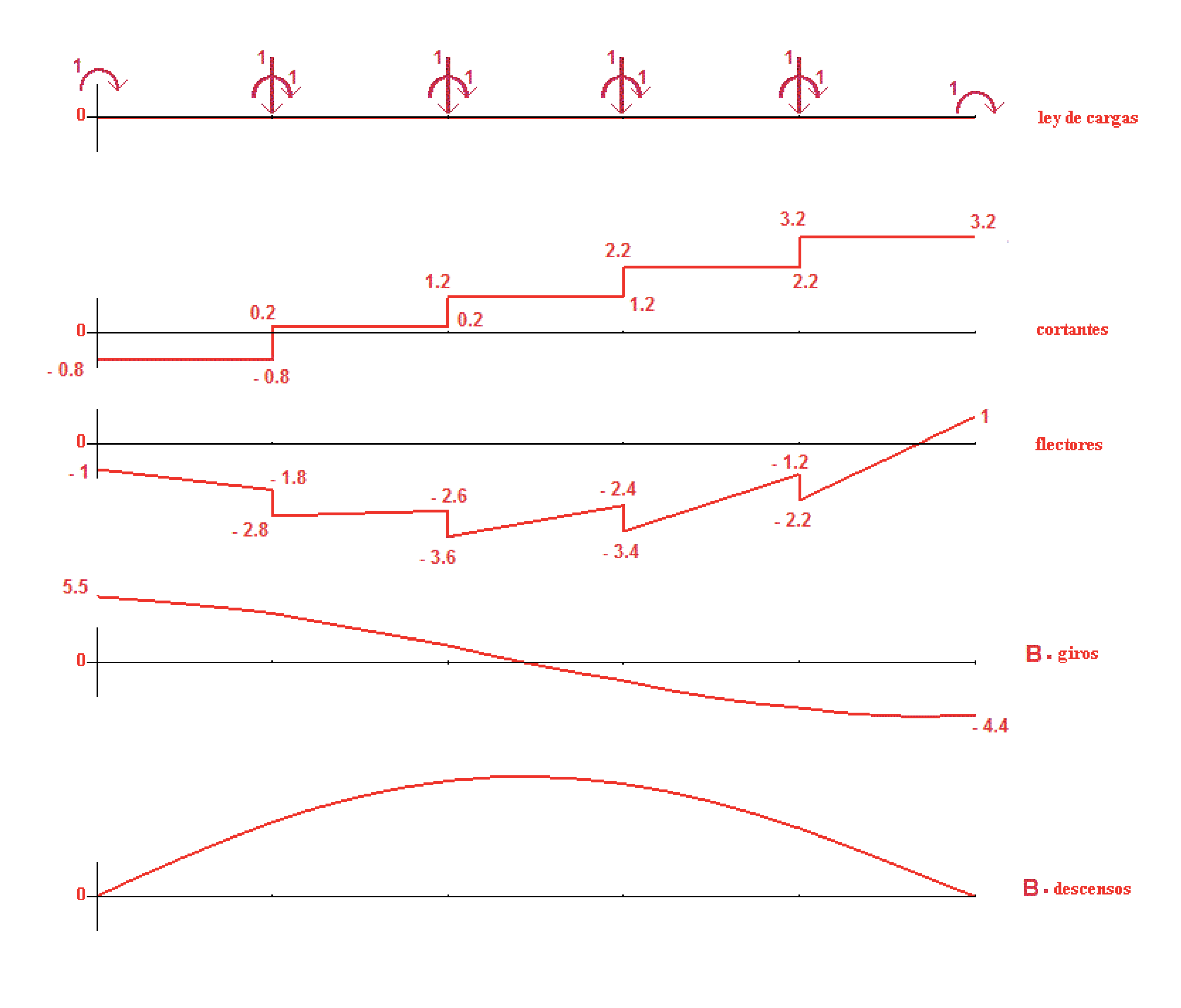


Figura 3.16

El sistema puede resolverse en dos etapas sucesivas en la primera de las cuales se obtienen los momentos en cada punto de la red o bien resolverse como un sistema único en sus "dos etapas". Las soluciones del sistema completo junto con los valores "exactos" de las deformadas y flectores se presentan en la tabla 3.7 (donde las y_i deben dividirse por B para obtener los descensos de las secciones en su verdadera escala). En la figura 3.16 se representa gráficamente la solución del problema junto a la ley de cargas.

x	descensos By		giros $B\theta = By'$		momentos $m = By''$		cortantes $t = By'''$	
	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos
0.00	0.0000	0.00000	5.5125	5.5000	-1.0000	-1.0000	-0.8000	-0.8000
0.25	1.3469	1.34166	5.2375	5.2250	-1.2000	-1.2000	-0.8000	-0.8000
0.50	2.6188	2.60833	4.9125	4.9000	-1.4000	-1.4000	-0.8000	-0.8000
0.75	3.8031	3.78750	4.5375	4.5250	-1.6000	-1.6000	-0.8000	-0.8000
1.00^-	4.8875	4.86666	4.1125	4.1000	-1.8000	-1.8000	-0.8000	-0.8000
1.00^+					-2.8000	-2.8000	0.2000	0.2000
1.25	5.8281	5.80468	3.4188	3.4062	-2.7500	-2.7500	0.2000	0.2000
1.50	6.5969	6.57083	2.7375	2.7250	-2.7000	-2.7000	0.2000	0.2000
1.75	7.1969	7.16822	2.0688	2.0562	-2.6500	-2.6500	0.2000	0.2000
2.00^-	6.6313	7.60000	1.4125	1.4000	-2.6000	-2.6000	0.2000	0.2000
2.00^+					-3.6000	-3.6000	1.2000	1.2000
2.25	7.8719	7.84062	0.5500	0.5375	-3.3000	-3.3000	1.2000	1.2000
2.50	7.9063	7.87500	-0.2375	-0.2500	-3.0000	-3.0000	1.2000	1.2000
2.75	7.7531	7.72187	-0.9500	-0.9625	-2.7000	-2.7000	1.2000	1.2000
3.00^-	7.4313	7.40000	-1.5875	-1.6000	-2.4000	-2.4000	1.2000	1.2000
3.00^+					-3.4000	-3.4000	2.2000	2.2000
3.25	6.9281	6.89947	-2.3688	-2.3812	-2.8500	-2.8500	2.2000	2.2000
3.50	6.2469	6.22083	-3.0125	-3.0250	-2.3000	-2.3000	2.2000	2.2000
3.75	5.4219	5.39843	-3.5188	-3.5312	-1.7500	-1.7500	2.2000	2.2000
4.00^-	4.4875	4.46666	-3.8875	-3.9000	-1.2000	-1.2000	2.2000	2.2000
4.00^+					-2.2000	-2.2000	3.2000	3.2000
4.25	3.4469	3.43124	-4.3375	-4.3500	-1.4000	-1.4000	3.2000	3.2000
4.50	2.3188	2.30833	-4.5875	-4.6000	-0.6000	-0.6000	3.2000	3.2000
4.75	1.1531	1.14791	-4.6375	-4.6500	0.2000	0.2000	3.2000	3.2000
5.00	0.0000	0.00000	-4.4875	-4.5000	1.0000	1.0000	3.2000	3.2000

Tabla 3.7

3.6.4. Viga empotrada–apoyada

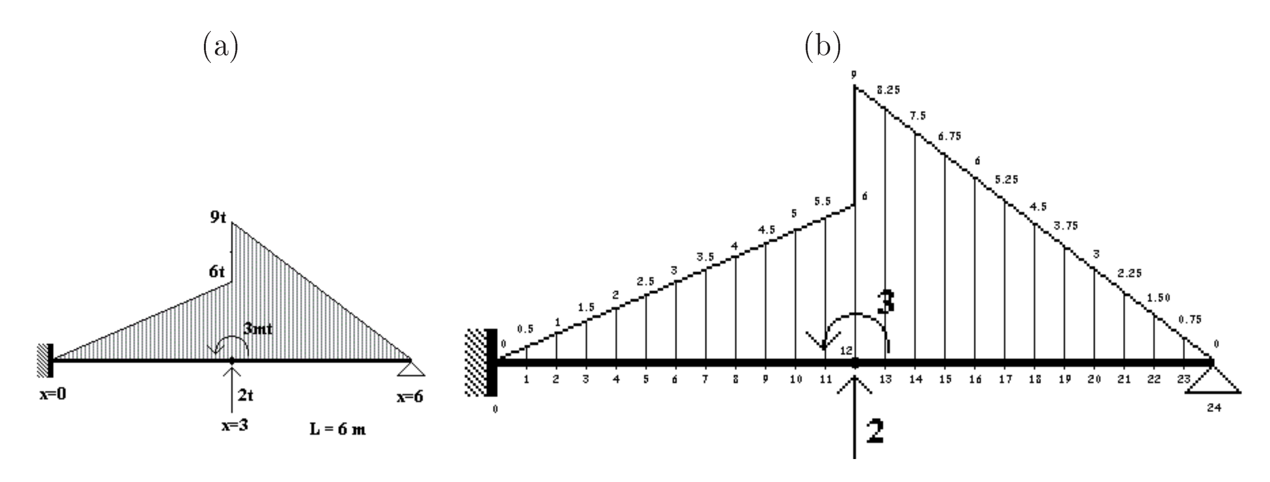


Figura 3.17

Consideramos aquí la viga empotrada–apoyada de $l = 6$ m. solicitada por cargas lineales como se señala en la figura 3.17(a) y así mismo solicitadas por una carga y un momento aislado en su punto medio con los sentidos y magnitud que se muestra en la figura. Las solicitaciones continuas pueden describirse por la función

$$w(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 < x < 3, \\ -3x + 18, & \text{si } 3 < x < 6, \end{cases}$$

con una discontinuidad de salto finito en $x = 3$.

Proyectaremos el intervalo sobre una red de paso constante $h = 0.25$ con las notaciones y referencias de la figura 3.17(b).

Obtendremos el sistema de ecuaciones:

1ª etapa

$$\begin{array}{lcl}
\frac{1}{0.25^2}\left(m_2 - 2m_1 + m_0(d)\right) & = & 0.5, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_3 - 2m_2 + m_1\right) & = & 1, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_4 - 2m_3 + m_2\right) & = & 1.5, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_5 - 2m_4 + m_3\right) & = & 2, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_6 - 2m_5 + m_4\right) & = & 2.5, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_7 - 2m_6 + m_5\right) & = & 3, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_8 - 2m_7 + m_6\right) & = & 3.5, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_9 - 2m_8 + m_7\right) & = & 4, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{10} - 2m_9 + m_8\right) & = & 4.5, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{11} - 2m_{10} + m_9\right) & = & 5, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{12}(i) - 2m_{11} + m_{10}\right) & = & 5.5, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{13} - 2m_{12}(i) + m_{11}\right) & = & 7.5 - \frac{2}{0.25} + \frac{3}{0.25^2}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{14} - 2m_{13} + m_{12}(d)\right) & = & 8.25, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{15} - 2m_{14} + m_{13}\right) & = & 7.5, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{16} - 2m_{15} + m_{14}\right) & = & 6.75, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{17} - 2m_{16} + m_{15}\right) & = & 6,
\end{array}$$

2ª etapa

$$\begin{array}{lcl}
\frac{1}{0.25^2}\left(y_2 - 2y_1 + y_0\right) & = & m_1, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_3 - 2y_2 + y_1\right) & = & m_2, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_4 - 2y_3 + y_2\right) & = & m_3, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_5 - 2y_4 + y_3\right) & = & m_4, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_6 - 2y_5 + y_4\right) & = & m_5, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_7 - 2y_6 + y_5\right) & = & m_6, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_8 - 2y_7 + y_6\right) & = & m_7, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_9 - 2y_8 + y_7\right) & = & m_8, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{10} - 2y_9 + y_8\right) & = & m_9, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{11} - 2y_{10} + y_9\right) & = & m_{10}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{12} - 2y_{11} + y_{10}\right) & = & m_{11}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{13} - 2y_{12} + y_{11}\right) & = & m_{12} + \frac{3}{2}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{14} - 2y_{13} + y_{12}\right) & = & m_{13}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{15} - 2y_{14} + y_{13}\right) & = & m_{14}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{16} - 2y_{15} + y_{14}\right) & = & m_{15}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{17} - 2y_{16} + y_{15}\right) & = & m_{16},
\end{array}$$

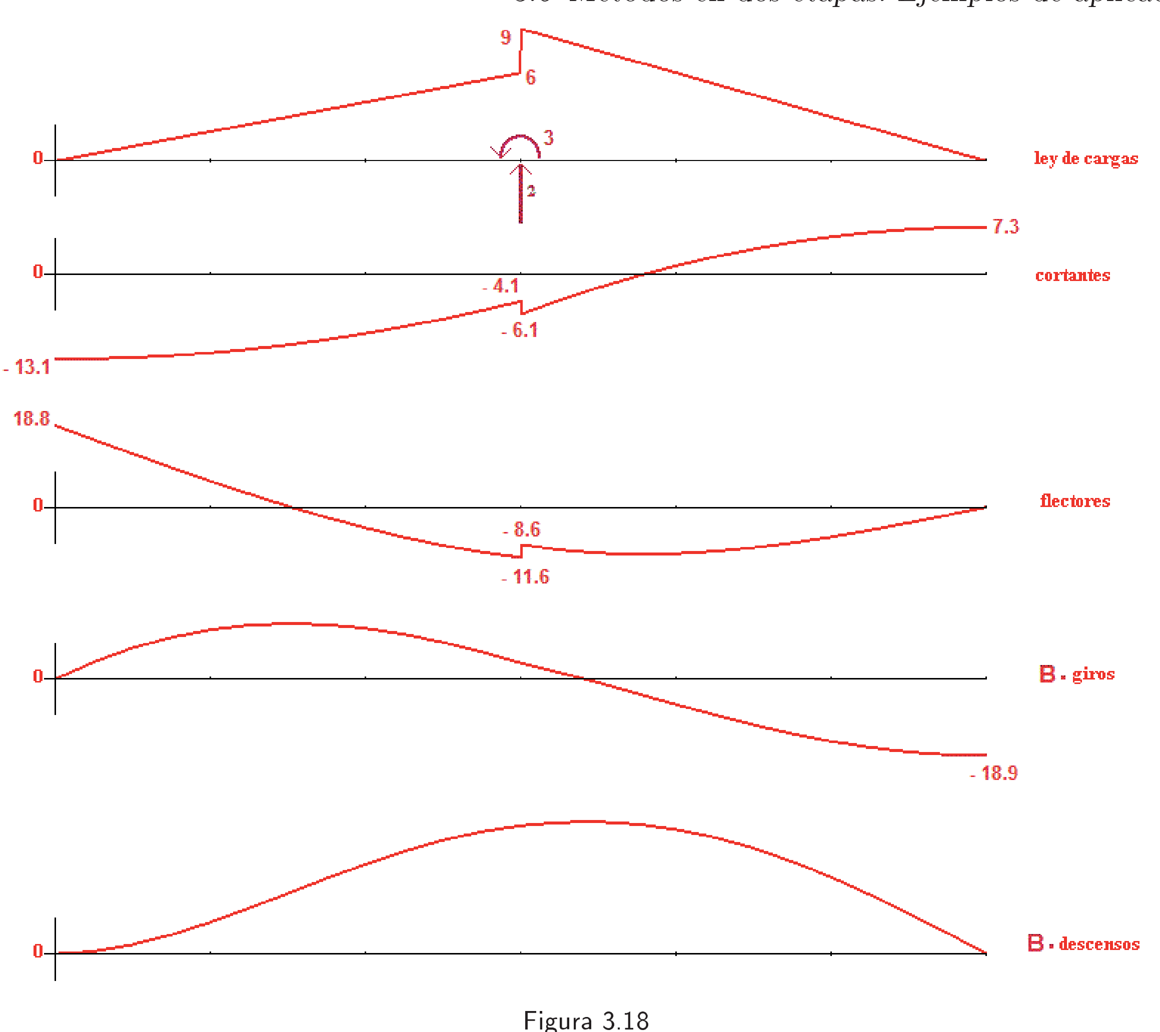


Figura 3.18

$$\begin{aligned}
\frac{1}{0.25^2}(m_{18}-2m_{17}+m_{16}) &= 5.25,\\
\frac{1}{0.25^2}(m_{19}-2m_{18}+m_{17}) &= 4.5,\\
\frac{1}{0.25^2}(m_{20}-2m_{19}+m_{18}) &= 3.75,\\
\frac{1}{0.25^2}(m_{21}-2m_{20}+m_{19}) &= 3,\\
\frac{1}{0.25^2}(m_{22}-2m_{21}+m_{20}) &= 2.25,\\
\frac{1}{0.25^2}(m_{23}-2m_{22}+m_{21}) &= 1.5,\\
\frac{1}{0.25^2}(m_{24}(i)-2m_{23}+m_{22}) &= 0.75,
\end{aligned}$$

con las condiciones:
$m_{12}(d) = m_{12}(i) + 3,$
$m_{24} = 0,$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{0.25^2}(y_{18}-2y_{17}+y_{16}) &= m_{17},\\
\frac{1}{0.25^2}(y_{19}-2y_{18}+y_{17}) &= m_{18},\\
\frac{1}{0.25^2}(y_{20}-2y_{19}+y_{18}) &= m_{19},\\
\frac{1}{0.25^2}(y_{21}-2y_{20}+y_{19}) &= m_{20},\\
\frac{1}{0.25^2}(y_{22}-2y_{21}+y_{20}) &= m_{21},\\
\frac{1}{0.25^2}(y_{23}-2y_{22}+y_{21}) &= m_{22},\\
\frac{1}{0.25^2}(y_{24}-2y_{23}+y_{22}) &= m_{23},
\end{aligned}$$

con las condiciones:
$y_0 = 0,$
$y_1 = \frac{1}{2}\cdot 0.25^2 \cdot m_0(d),$
$y_{24} = 0.$

Las dos etapas deben de resolverse simultáneamente ya que determinan un solo sistema de Cramer. La solución del sistema se muestra en la tabla 3.8 junto a los valores “exactos” de las deformadas y flectores (donde las y_i deben dividirse por B para obtener los descensos de las secciones), mientras que en la figura 3.18 se representan gráficamente las cuatro funciones junto a la ley de cargas.

x	descensos By		giros $B\theta = By'$		momentos $m = By''$		cortantes $t = By'''$	
	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0	18.8373	18.8250	-13.1448	-13.1375
0.25	0.5887	0.5541	4.2986	4.2960	15.5511	15.5458	-13.0823	-13.0750
0.50	2.1493	2.0799	7.7795	7.7755	12.2962	12.2979	-12.8948	-12.8875
0.75	4.4784	4.3747	10.4544	10.4502	9.1037	9.1125	-12.5823	-12.5750
1.00	7.3765	7.2396	12.3430	12.3396	6.0050	6.0208	-12.1448	-12.1375
1.25	10.6499	10.4814	13.4726	13.4710	3.0314	3.0542	-11.5823	-11.5750
1.50	14.1128	13.9148	13.8783	13.8797	0.2139	0.2437	-10.8948	-10.8875
1.75	17.5890	17.3645	13.6030	13.6085	-2.4160	-2.3792	-10.0823	-10.0750
2.00	20.9143	20.6667	12.6976	12.7083	-4.8272	-0.7833	-9.1448	-9.1375
2.25	23.9378	23.6711	11.2206	11.2377	-6.9884	-6.9375	-8.0823	-8.0750
2.50	26.5246	26.2435	9.2385	9.2630	-8.8683	-8.8104	-6.8948	-6.8875
2.75	28.5571	28.2668	6.8255	6.8585	-10.4358	-10.3708	-5.5823	-5.5750
3.00^-	29.9374	29.6437	4.0636	4.1062	-11.6595	-11.5875	-4.1448	-4.1375
3.00^+					-8.6595	-8.5875	-6.1448	-6.1375
3.25	30.6827	30.3874	1.7419	1.7905	-9.9144	-9.8484	-3.9885	-3.9812
3.50	30.8083	30.5182	-0.8291	-0.7750	-10.6537	-10.5937	-2.0198	-2.0125
3.75	30.2681	29.9894	-3.5264	-3.4673	-10.9243	-10.8703	-0.2385	-0.2312
4.00	29.0451	28.7833	-6.2386	-6.1750	-10.7730	-10.7250	1.3552	1.3625
4.25	27.1488	26.9089	-8.8660	-8.7985	-10.2467	-10.2046	2.7615	2.7687
4.50	24.6121	24.3984	-11.3209	-11.2500	-9.3922	-9.3562	3.9802	3.9875
4.75	21.4884	21.3046	-13.5270	-13.4532	-8.2566	-8.2266	5.0115	5.0187
5.00	17.8486	17.6979	-15.4199	-15.3437	-6.8865	-6.8625	5.8552	5.8625
5.25	13.7784	13.6632	-16.9468	-16.8688	-5.3289	-5.3109	6.5115	6.5187
5.50	9.3752	9.2974	-18.0667	-17.9875	-3.6307	-3.6187	6.9802	6.9875
5.75	4.7451	4.7058	-18.7504	-18.6704	-1.8388	-1.8328	7.2615	7.2687
6.00	0.0000	0.0000	-18.9803	-18.9000	0.0000	0.00000	7.3552	7.3625

Tabla 3.8

3.6.5. Viga apoyada–empotrada

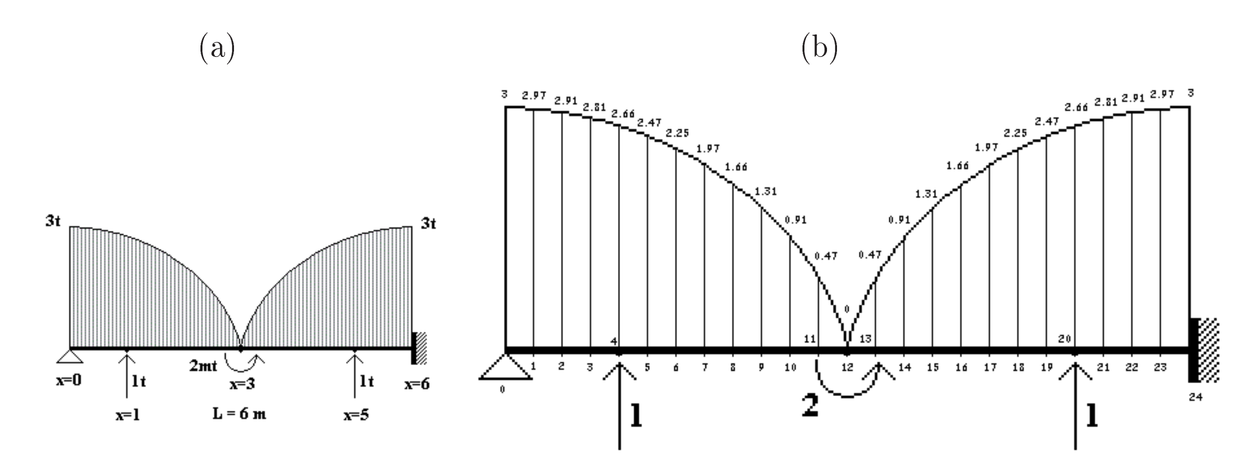


Figura 3.19

Se considera aquí la viga apoyada–empotrada de 6 m de longitud solicitada por dos segmentos de cargas de envolvente continua parabólica simétricas respecto del eje vertical que pasa por el punto medio de la viga y además cargas concentradas y un momento aislado en los puntos que se muestran en la figura 3.19(a) con los valores y sentidos señalados. La componente continua de la carga viene determinada por la ley:

$$w(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^2 + 3, & \text{si } 0 < x < 3, \\ -\frac{1}{3}(x-6)^2 + 3, & \text{si } 3 < x < 6. \end{cases}$$

Proyectaremos el intervalo que determina la pieza sobre una red de paso constante $h = 0.25$ con las notaciones y referencias de la figura 3.19(b) con el siguiente sistema de ecuaciones:

1ª etapa

$$\begin{array}{lcl}
\frac{1}{0.25^2}\left(m_2 - 2m_1 + m_0\left(d\right)\right) & = & -\frac{1}{3}0.25^2 + 3, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_3 - 2m_2 + m_1\right) & = & -\frac{1}{3}0.5^2 + 3, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_4 - 2m_3 + m_2\right) & = & -\frac{1}{3}0.75^2 + 3, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_5 - 2m_4 + m_3\right) & = & -\frac{1}{3}1^2 + 3 - \frac{1}{0.25}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_6 - 2m_5 + m_4\right) & = & -\frac{1}{3}1.25^2 + 3, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_7 - 2m_6 + m_5\right) & = & -\frac{1}{3}1.5^2 + 3, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_8 - 2m_7 + m_6\right) & = & -\frac{1}{3}1.75^2 + 3, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_9 - 2m_8 + m_7\right) & = & -\frac{1}{3}2^2 + 3, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{10} - 2m_9 + m_8\right) & = & -\frac{1}{3}2.25^2 + 3, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{11} - 2m_{10} + m_9\right) & = & -\frac{1}{3}2.5^2 + 3, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{12}\left(i\right) - 2m_{11} + m_{10}\right) & = & -\frac{1}{3}2.75^2 + 3, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{13} - 2m_{12}\left(i\right) + m_{11}\right) & = & 0 + \frac{2}{0.25^2}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{14} - 2m_{13} + m_{12}\left(d\right)\right) & = & -\frac{1}{3}2.75^2 + 3, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{15} - 2m_{14} + m_{13}\right) & = & -\frac{1}{3}2.5^2 + 3, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{16} - 2m_{15} + m_{14}\right) & = & -\frac{1}{3}2.25^2 + 3, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{17} - 2m_{16} + m_{15}\right) & = & -\frac{1}{3}2^2 + 3,
\end{array}$$

2ª etapa

$$\begin{array}{lcl}
\frac{1}{0.25^2}\left(y_2 - 2y_1 + y_0\right) & = & m_1, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_3 - 2y_2 + y_1\right) & = & m_2, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_4 - 2y_3 + y_2\right) & = & m_3, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_5 - 2y_4 + y_3\right) & = & m_4, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_6 - 2y_5 + y_4\right) & = & m_5, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_7 - 2y_6 + y_5\right) & = & m_6, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_8 - 2y_7 + y_6\right) & = & m_7, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_9 - 2y_8 + y_7\right) & = & m_8, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{10} - 2y_9 + y_8\right) & = & m_9, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{11} - 2y_{10} + y_9\right) & = & m_{10}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{12} - 2y_{11} + y_{10}\right) & = & m_{11}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{13} - 2y_{12} + y_{11}\right) & = & m_{12} + \frac{1}{2} \cdot 2, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{14} - 2y_{13} + y_{12}\right) & = & m_{13}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{15} - 2y_{14} + y_{13}\right) & = & m_{14}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{16} - 2y_{15} + y_{14}\right) & = & m_{15}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{17} - 2y_{16} + y_{15}\right) & = & m_{16},
\end{array}$$

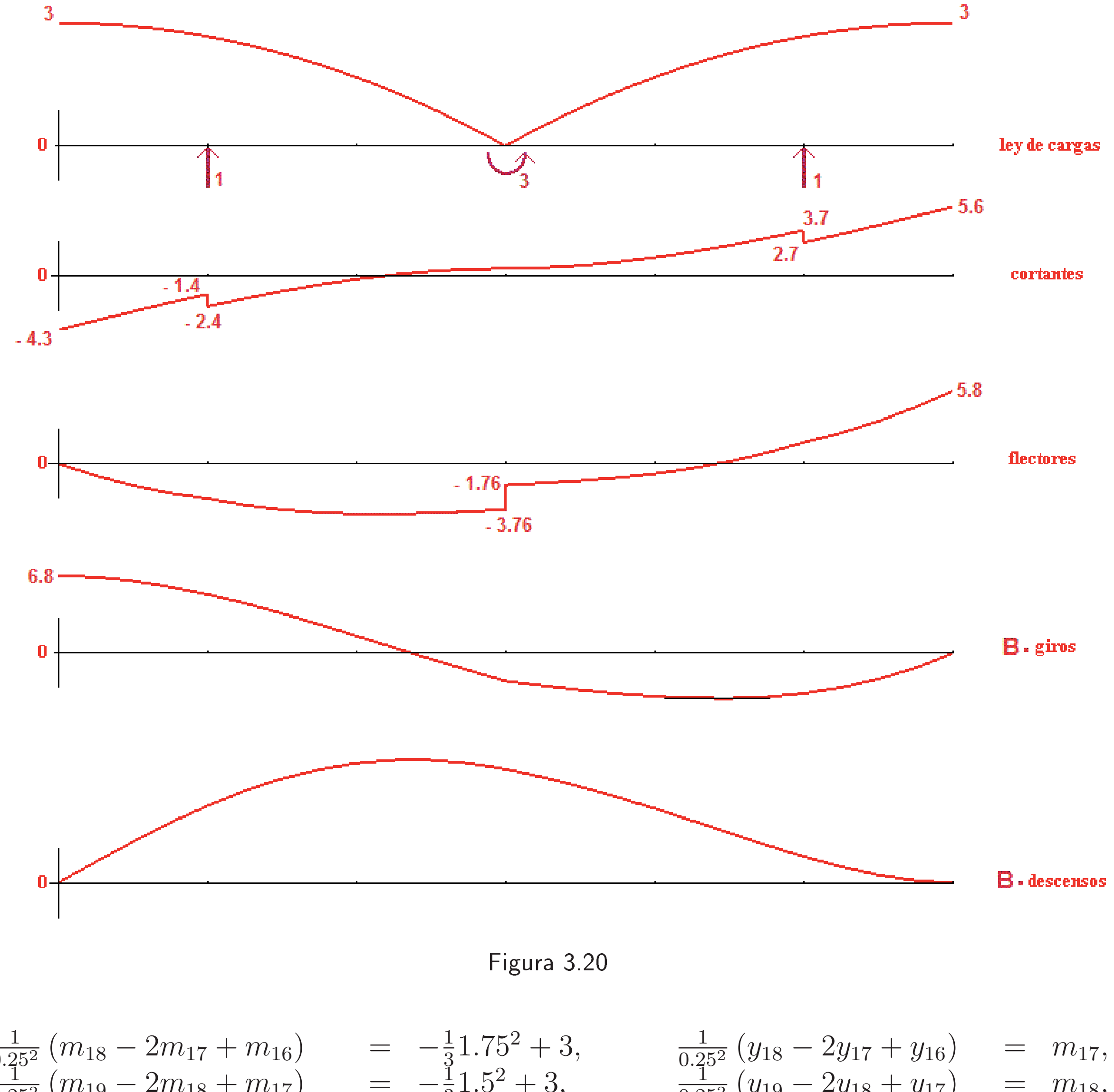


Figura 3.20

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{18}-2m_{17}+m_{16}\right) &= -\tfrac{1}{3}1.75^2+3, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{19}-2m_{18}+m_{17}\right) &= -\tfrac{1}{3}1.5^2+3, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{20}-2m_{19}+m_{18}\right) &= -\tfrac{1}{3}1.25^2+3, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{21}-2m_{20}+m_{19}\right) &= -\tfrac{1}{3}1^2+3-\tfrac{1}{0.25}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{22}-2m_{21}+m_{20}\right) &= -\tfrac{1}{3}0.75^2+3, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{23}-2m_{22}+m_{21}\right) &= -\tfrac{1}{3}0.5^2+3, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(m_{24}\left(i\right)-2m_{23}+m_{22}\right) &= -\tfrac{1}{3}0.25^2+3,
\end{aligned}$$

con las condiciones:
$m_0 = 0,$
$m_{12}\left(d\right) = m_{12}\left(i\right)+2,$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{18}-2y_{17}+y_{16}\right) &= m_{17}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{19}-2y_{18}+y_{17}\right) &= m_{18}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{20}-2y_{19}+y_{18}\right) &= m_{19}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{21}-2y_{20}+y_{19}\right) &= m_{20}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{22}-2y_{21}+y_{20}\right) &= m_{21}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{23}-2y_{22}+y_{21}\right) &= m_{22}, \\
\tfrac{1}{0.25^2}\left(y_{24}-2y_{23}+y_{22}\right) &= m_{23},
\end{aligned}$$

con las condiciones:
$y_0 = 0,$
$y_{23} = \frac{1}{2}\cdot 0.25^2\cdot m_{24}\left(i\right),$
$y_{24} = 0.$

Las dos etapas del sistema se resuelven simultáneamente. Las soluciones del sistema se muestran en la tabla 3.9 junto a los valores "exactos" de las deformadas y flectores (donde las y_i deben dividirse por B para obtener las flechas en su escala) y en la figura 3.20 se representa gráficamente todas las funciones junto con la ley de cargas.

x	descensos By		giros $B\theta = By'$		momentos $m = By''$		cortantes $t = By'''$	
	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos
0.00	0.0000	0.00000	6.8882	6.9250	0.0000	0.0000	-4.3438	-4.3438
0.25	1.7220	1.7204	6.7642	6.7970	-0.9922	-0.9928	-3.5964	-3.5964
0.50	3.3821	3.3797	6.4154	6.4441	-1.7982	-1.7996	-2.8594	-2.8594
0.75	4.9297	4.9276	5.8878	5.9123	-2.4219	-2.4244	-2.1433	-2.1433
1.00^-	6.3260	6.3248	5.2264	5.2465	-2.8698	-2.8736	-1.4584	-1.4584
1.00^+							-2.4584	-2.4584
1.25	7.5429	7.5406	4.4425	4.4582	-3.4011	-3.4063	-1.8151	-1.8151
1.50	8.5473	8.5444	3.5452	3.5562	-3.7774	-3.7843	-1.2240	-1.2240
1.75	9.3155	9.3124	2.5714	2.5777	-4.0131	-4.0220	-0.6954	-0.6953
2.00	9.8329	9.8296	1.5541	1.5555	-4.1251	-4.1361	-0.2396	-0.2396
2.25	10.0926	10.0889	0.5219	0.5183	-4.1329	-4.1463	0.1328	0.1328
2.50	10.0939	10.0895	-0.5021	-0.5108	-4.0587	-4.0746	0.4114	0.4114
2.75	9.8415	9.8357	-1.5003	-1.5142	-3.9272	-3.9459	0.5859	0.5859
3.00^-	9.3437	9.3354	-2.4620	-2.4812	-3.7658	-3.7875	0.6458	0.6458
3.00^+					-1.7658	-1.7875		
3.25	8.6730	8.6610	-2.8832	-2.9074	-1.6043	-1.6188	0.7057	0.7057
3.50	7.9021	7.8855	-3.2604	-3.2882	-1.4129	-1.4205	0.8802	0.8802
3.75	7.0429	7.0215	-3.5825	-3.6128	-1.1642	-1.1650	1.1588	1.1588
4.00	6.1108	6.0852	-3.8322	-3.8639	-0.8335	-0.8278	1.5312	1.5312
4.25	5.1267	5.0976	-3.9862	-4.0187	-0.3986	-0.3866	1.9869	1.9869
4.50	4.1177	4.0866	-4.0161	-4.0469	0.1600	0.1781	2.5156	2.5156
4.75	3.1187	3.0874	-3.8887	-3.9173	0.8592	0.8832	3.1067	3.1067
5.00^-	2.1734	2.1442	-3.5671	-3.5924	1.7133	1.7430	3.7500	3.7499
5.00^+							2.7500	2.7499
5.25	1.3351	1.3082	-3.0425	-3.0631	2.4841	2.5193	3.4349	3.4348
5.50	0.6521	0.6306	-2.3031	-2.3180	3.4307	3.4711	4.1510	4.1510
5.75	0.1836	0.1709	-1.3043	-1.3124	4.5596	4.6051	4.8880	4.8880
6.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	5.8747	5.9250	5.6354	5.6354

Tabla 3.9

3.6.6. Viga doblemente empotrada

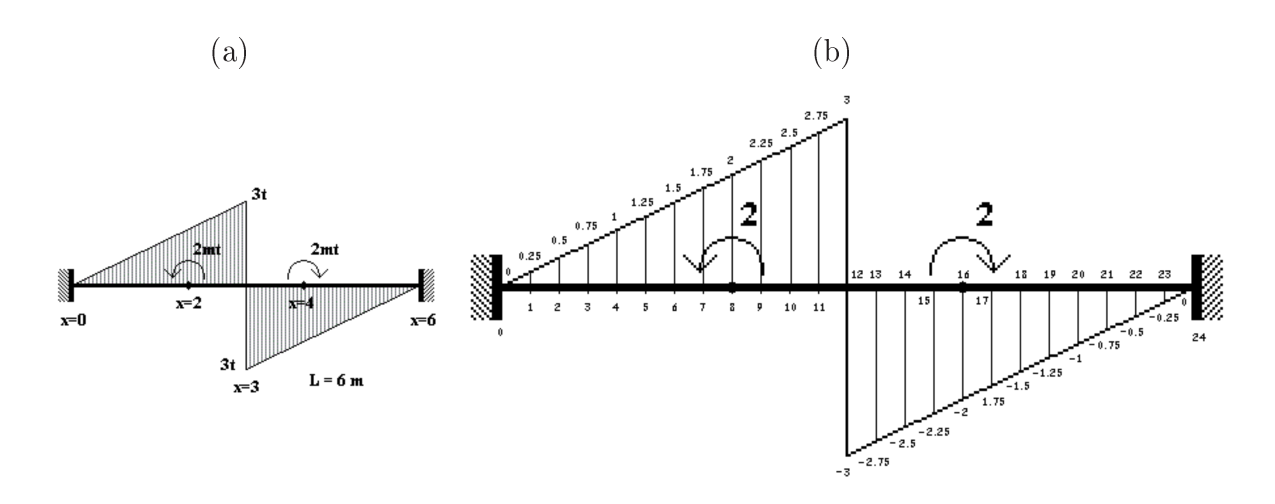


Figura 3.21

Se considera aquí la viga doblemente empotrada de 6 m de longitud solicitada por dos segmentos de cargas lineales y por dos momentos aislados con los valores y sentidos que se señalan en la figura 3.21(a). La componente continua de la carga viene expresada por:

$$w\left(x\right)=\left\{\begin{array}{ll} x, & \text{si } 0<x<3, \\ x-6, & \text{si } 3<x<6. \end{array}\right.$$

En la figura 3.21(b) se representa la pieza con la numeración de nodos y las referencias complementarias para aplicar el sistema de ecuaciones que será en este caso:

1ª etapa

$$\begin{array}{lcl}
\frac{1}{0.25^2}\left(m_2-2m_1+m_0\left(d\right)\right) & = & 0.25, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_3-2m_2+m_1\right) & = & 0.5, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_4-2m_3+m_2\right) & = & 0.75, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_5-2m_4+m_3\right) & = & 1, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_6-2m_5+m_4\right) & = & 1.25, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_7-2m_6+m_5\right) & = & 1.5, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_8\left(i\right)-2m_7+m_6\right) & = & 1.75, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_9-2m_8\left(i\right)+m_7\right) & = & 2+\frac{2}{0.25^2}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{10}-2m_9+m_8\left(d\right)\right) & = & 2.25, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{11}-2m_{10}+m_9\right) & = & 2.5, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{12}-2m_{11}+m_{10}\right) & = & 2.75, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{13}-2m_{12}+m_{11}\right) & = & 0, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{14}-2m_{13}+m_{12}\right) & = & -2.75, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{15}-2m_{14}+m_{13}\right) & = & -2.5, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{16}\left(i\right)-2m_{15}+m_{14}\right) & = & -2.25, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{17}-2m_{16}\left(i\right)+m_{15}\right) & = & -2-\frac{2}{0.25^2}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{18}-2m_{17}+m_{16}\left(d\right)\right) & = & -1.75,
\end{array}$$

2ª etapa

$$\begin{array}{lcl}
\frac{1}{0.25^2}\left(y_2-2y_1+y_0\right) & = & m_1, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_3-2y_2+y_1\right) & = & m_2, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_4-2y_3+y_2\right) & = & m_3, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_5-2y_4+y_3\right) & = & m_4, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_6-2y_5+y_4\right) & = & m_5, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_7-2y_6+y_5\right) & = & m_6, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_8-2y_7+y_6\right) & = & m_7, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_9-2y_8+y_7\right) & = & m_8+\frac{1}{2}\cdot 2, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{10}-2y_9+y_8\right) & = & m_9, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{11}-2y_{10}+y_9\right) & = & m_{10}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{12}-2y_{11}+y_{10}\right) & = & m_{11}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{13}-2y_{12}+y_{11}\right) & = & m_{12}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{14}-2y_{13}+y_{12}\right) & = & m_{13}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{15}-2y_{14}+y_{13}\right) & = & m_{14}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{16}-2y_{15}+y_{14}\right) & = & m_{15}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{17}-2y_{16}+y_{15}\right) & = & m_{16}-\frac{1}{2}\cdot 2, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{18}-2y_{17}+y_{16}\right) & = & m_{17},
\end{array}$$

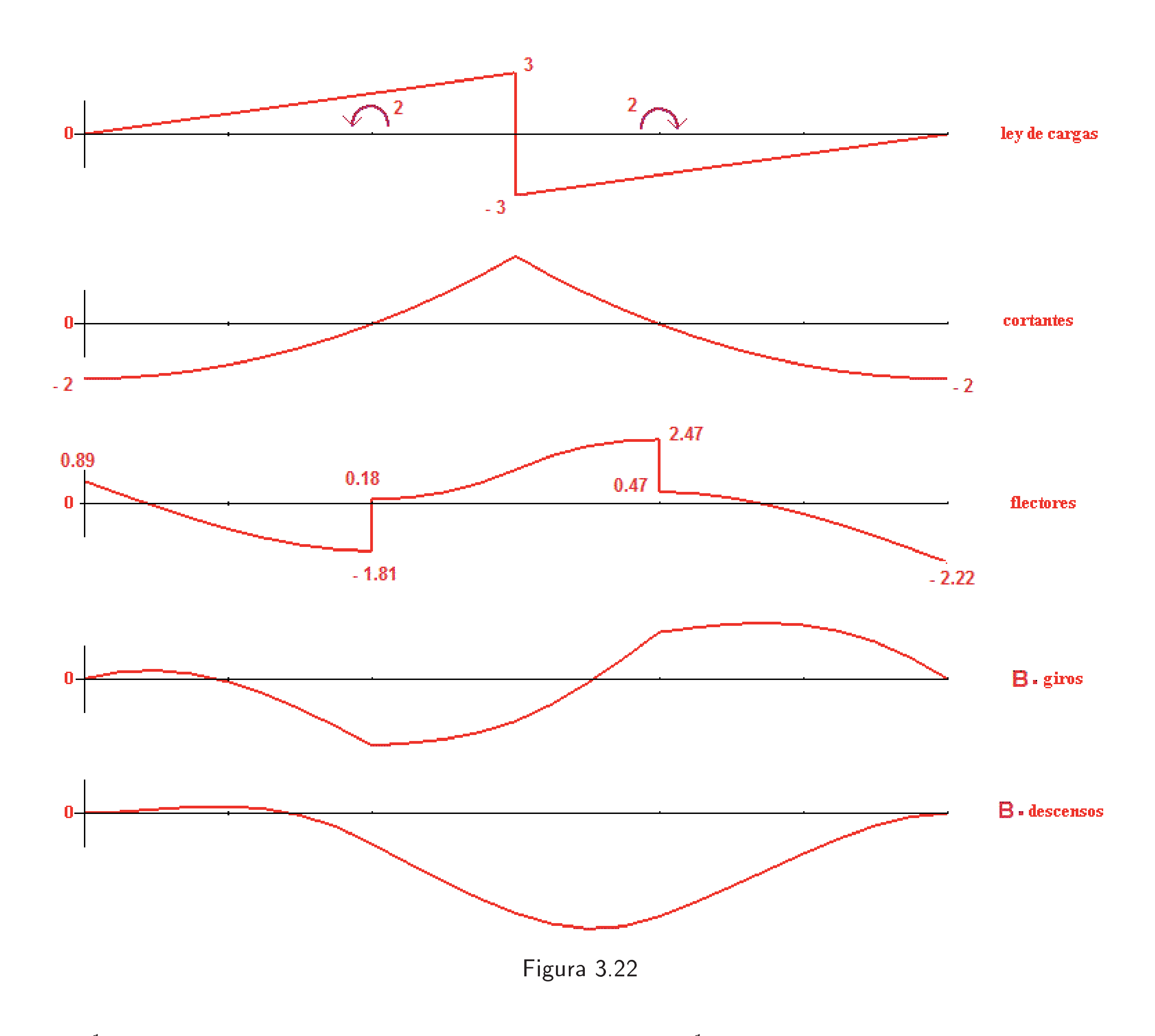


Figura 3.22

$$\begin{aligned}
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{19}-2m_{18}+m_{17}\right) &= -1.5, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{20}-2m_{19}+m_{18}\right) &= -1.25, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{21}-2m_{20}+m_{19}\right) &= -1, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{22}-2m_{21}+m_{20}\right) &= -0.75, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{23}-2m_{22}+m_{21}\right) &= -0.5, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(m_{24}\left(i\right)-2m_{23}+m_{22}\right) &= -0.25,
\end{aligned}$$

con las condiciones:
$m_8\left(d\right)=m_8\left(i\right)+2,$
$m_{16}\left(d\right)=m_{16}\left(i\right)-2,$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{19}-2y_{18}+y_{17}\right) &= m_{18}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{20}-2y_{19}+y_{18}\right) &= m_{19}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{21}-2y_{20}+y_{19}\right) &= m_{20}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{22}-2y_{21}+y_{20}\right) &= m_{21}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{23}-2y_{22}+y_{21}\right) &= m_{22}, \\
\frac{1}{0.25^2}\left(y_{24}-2y_{23}+y_{22}\right) &= m_{23},
\end{aligned}$$

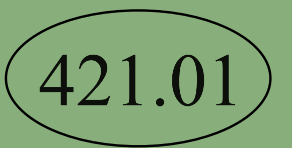
con las condiciones:
$y_0=0,$
$y_1=\frac{1}{2}\cdot 0.25^2\cdot m_0\left(d\right),$
$y_{23}=\frac{1}{2}\cdot 0.25^2\cdot m_{24}\left(i\right),$
$y_{24}=0.$

Las dos etapas del sistema se resuelven simultáneamente. Las soluciones de este sistema se muestran en la tabla 3.10 junto a los valores “exactos” de las deformadas y flectores. En la figura 3.22 se representa gráficamente las soluciones numéricas obtenidas junto con la ley de cargas.

x	descensos By		giros $B\theta = By'$		momentos $m = By''$		cortantes $t = By'''$	
	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos	discretos	exactos
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.8951	0.9083	-2.0102	-2.0250
0.25	0.0280	0.0231	0.1610	0.1640	0.3925	0.4047	-1.9789	-1.9937
0.50	0.0805	0.0716	0.1982	0.2036	-0.0944	-0.0833	-1.8852	-1.9000
0.75	0.1271	0.1151	0.1177	0.1249	-0.5500	-0.5401	-1.7289	-1.7437
1.00	0.1393	0.1250	-0.0709	-0.0625	-0.9588	-0.9500	-1.5102	-1.5250
1.25	0.0916	0.0759	-0.3539	-0.3449	-1.3051	-1.2974	-1.2289	-1.2437
1.50	-0.0377	-0.0539	-0.7137	-0.7047	-1.5733	-1.5667	-0.8852	-0.9000
1.75	-0.2653	-0.2811	-1.1289	-1.1204	-1.7477	-1.7422	-0.4789	-0.4937
2.00^-	-0.6021	-0.6167	-1.5739	-1.5667	-1.8128	-1.8083	-0.0102	-0.0250
2.00^+					0.1872	0.1917		
2.25	-0.9897	-1.0021	-1.5196	-1.5142	0.2472	0.2505	0.5211	0.5062
2.50	-1.3619	-1.3711	-1.4327	-1.4297	0.4478	0.4500	1.1148	1.1000
2.75	-1.7061	-1.7112	-1.2762	-1.2761	0.8046	0.8057	1.7711	1.7562
3.00	-2.0000	-2.0000	-1.0089	-1.0125	1.3333	1.3333	2.4898	2.4750
3.25	-2.2106	-2.2055	-0.6095	-0.6094	1.8620	1.8609	1.7711	1.7562
3.50	-2.3048	-2.2956	-0.0994	-0.0963	2.2189	2.2167	1.1148	1.1000
3.75	-2.2603	-2.2479	0.4804	0.4858	2.4195	2.4161	0.5211	0.5062
4.00^-	-2.0646	-2.0500	1.0927	1.1000	2.4794	2.4749	-0.0102	-0.0250
4.00^+					0.4794	0.4750		
4.25	-1.7764	-1.7605	1.2045	1.2129	0.4144	0.4088	-0.4789	-0.4937
4.50	-1.4623	-1.4461	1.2863	1.2953	0.2400	0.2333	-0.8852	-0.9000
4.75	-1.1333	-1.1176	1.3127	1.3218	-0.0282	-0.0359	-1.2289	-1.2437
5.00	-0.8060	-0.7917	1.2624	1.2708	-0.3745	-0.3833	-1.5102	-1.5250
5.25	-0.5021	-0.4901	1.1177	1.1249	-0.7833	-0.7932	-1.7289	-1.7437
5.50	-0.2471	-0.2383	0.8649	0.8703	-1.2390	-1.2500	-1.8852	-1.9000
5.75	-0.0696	-0.0648	0.4943	0.4973	-1.7259	-1.7380	-1.9789	-1.9937
6.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-2.2284	-2.2417	-2.0102	-2.0250

Tabla 3.10

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

